Universidade de Brasília

FACE – Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciências da Informação e Documentação

Departamento de Economia – Programa de Pós-Graduação

ENSAIOS EM TEORIA DA DECISÃO

Luís Fernando Brands Barbosa

Para meus pais.

Parte I

PREÂMBULO

Neste trabalho são abordados dois temas relacionados à teoria da decisão individual. O primeiro tema, é abordado em duas partes deste trabalho. Na Parte II, denominada Teoria da P(R)eferência Revelada com Aspirações, apresentamos a modelagem do comportamento de um agente que executa suas escolhas do seguinte modo. Dado um problema de escolha, o agente elege uma aspiração que deseja de atingir. No caso em que sua aspiração não pode ser alcançada, ele identifica um ponto de referência, a alternativa factível que é mais semelhante possível à sua aspiração, e que pode enviesar seu comportamento de escolha ao atrair sua atenção para uma certa região do conjunto de alternativas. Na Parte III, denominada Teoria da P(R)eferência Revelada com Aspirações, aplicamos este modelo aos seguintes tópicos: equilíbrio geral em economias de troca pura e equilíbrio de Nash em jogos com finitos agentes.

O outro tema é abordado na Parte IV, chamada de Nota à "Equivalent Comparisons of Information Channels". Nela desenvolvemos o modo adequado de utilizar o arcabouço apresentado por Dekel, Lipman e Rustichini (2001) para representar preferências ex ante sobre canais de informação cujas peças são conhecidas ex post.

1 Agradecimentos

Este trabalho deve muito à orientação valiosa do professor e amigo Gil Riella. Muitas ideias importantes neste trabalho são resultado de ricas discussões com ele. Quero também agradecer aos amigos José Guilherme de Lara Resende, Daniel O. Cajueiro, Rogério Mazali, José Heleno Faro e Leandro G. Nascimento, tanto pelas conversas de teor acadêmico, quanto pelo apoio que me foi dado. Agradeço também às amizades que travei no ambiente da pós graduação do departamento de Economia, importantes para tornar mais aprazível a pressão envolvida na vida acadêmica, mas que transcendem este ambinte: Fernanda Senra de Moura, Silvia Palma, Waleska de Fátima Monteiro, Vinicius Ratton Brandi, Camila Schoti, Roberto B. Santos, Anderson M. Teixeira, Gilvan Cândido e Luciana Duarte Bhering Carvalho. Desejo mencionar grandes amigos que sempre estiveram presentes, especialmente Fernando Mazzini, Eduardo Calhman de Miranda, Pedro Miranda, Ana Paula Miranda, Rodrigo Marques, Ronaldo Gallo, Fernanda Goldstein, Kátia Crócamo Barbosa, Lorena Ferraz e Marius Del Giudice Rodriguez. Reservo um agradecimento especial para meus pais, Carlos Augusto Barbosa e Vilma Brands Barbosa, pelo inabalável afeto com que sempre me apoiaram e que foi imprescindível para que eu chegasse até aqui.

Parte II

TEORIA DA P(R)EFERÊNCIA REVELADA COM ASPIRAÇÕES

2 Introdução

As aspirações de um indivíduo constituem-se em um padrão que ele visa satisfazer nas situações em que possui a oportunidade de fazer escolhas. É fácil convencer-se de que uma pessoa que possui aspirações mais rigorosas possui um comportamento diferente de uma pessoa que possui aspirações menos exigentes. Porém, em muitas situações nas quais um indivíduo deve tomar uma decisão, ele pode descobrir que a aspiração que disciplina suas escolhas pode não ser exeqüível. Em situações desse tipo o agente pode levar em conta a alternativa factível que mais se assemelha à aspiração original e tomá-la como a referência na qual irá basear seu comportamento de escolha.

Em um artigo recente, Guney, Richter e Tsur (2011) apresentaram um modelo de escolha racional que captura elementos do comportamento de escolha baseado em aspirações. Em seu modelo, um problema de escolha é um par de conjuntos (S, T) tal que $\varnothing \neq S \subseteq T \subseteq X$ e onde X é o conjunto de todas as alternativas, T é o conjunto de alternativas que o agente considera possíveis de ser obtidas e S é o conjunto de todas as alternativas que estão efetivamente disponíveis para a escolha do agente. O processo de escolha do agente é executado em duas fases. Na primeira fase, o agente escolhe a melhor alternativa $a(T)$ do conjunto de escolhas potenciais e a identifica como a aspiração que gostaria de satisfazer. Na segunda fase, se a aspiração não estiver de fato disponível, então o agente volta-se para as alternativas as quais ele efetivamente pode obter e escolhe aquela que mais se assemelha à sua aspiração. Porém, há uma limitação inerente a este modelo: o agente sempre escolhe a alternativa mais próxima à sua aspiração, independente de quaisquer outras considerações que poderia levar em conta. O exemplo seguinte ilustra o tipo de limitações que o modelo apresenta: Um jovem aspira ir para a faculdade de medicina de seu estado. Mas ele considera que as exigências para a admissão na faculdade são rigorosas demais para serem satisfeitas por ele. Deste modo, ele pode levar em consideração o ingresso na faculdade de enfermagem, pois esta é a que mais se parece com sua aspiração original. Porém, levando em consideração critérios tais como status social ele pode preferir ingressar na escola de odontologia. Outro exemplo é o seguinte: Uma pessoa aspira comprar um relógio Rolex, mas devido a suas restrições orçamentárias, esta é uma alternativa não exeqüível. Contudo, ele pode levar em consideração a possibilidade de obter uma réplica do Rolex devido à semelhança que apresenta em relação à sua opção original. Mas ao comparar as alternativas que estão disponíveis em sua possibilidade orçamentária e compará-las com a réplica Rolex, ele pode concluir que é melhor possuir um relógio Tissot do que uma réplica do Rolex.

Há um importante ponto ilustrado nos dois exemplos anteriores. Pode existir algum viés que faça a escolha do agente tender para a referência que mais se assemelha à aspiração. Porém, pode ser que existam alternativas que superem este viés e que sejam escolhidas em detrimento da referência.

No modelo que apresentamos neste trabalho a alternativa mais próxima do ponto de aspiração possui um poder de enviesar a escolha do agente, mas isto não garante que ela seja a alternativa efetivamente escolhida.

Neste artigo axiomatizamos uma teoria da preferência revelada que explica o seguinte processo de escolha: Dado um conjunto potencial T o agente escolhe nele um ponto de aspiração $a(T)$. No caso em que $a(T)$ não pode ser obtida, ele volta-se para o conjunto $S \subseteq T$ de todas as alternativas realmente disponíveis, nele identifica o ponto $r(S, a(T))$ que mais se assemelha a $a(T)$. A similaridade entre pontos $x \in S$ e o ponto $a(T)$ é descrita por uma distância subjetiva $d(x, a(T))$ que depende apenas do agente. Logo, o ponto $r(S, a(T))$ é o ponto que possui a menor distância subjetiva até $a(T)$, dentre todos os pontos $x \in S$. Devido ao viés de escolha gerado pela identificação de $r(S, a(T))$ e de $a(T)$, o agente tem sua atenção atraída para uma região $Q(r(S, a(T)), a(T))$ que depende apenas de $r(S, a(T))$ e de $a(T)$. Finalmente, o agente age racionalmente, escolhendo a alternativa que maximiza seu bem estar em $S \cap Q(r(S, a(T)), a(T))$. Devemos notar que, diferentemente de Guney, Richter e Tsur (2011), $r(S, a(T))$ não é necessariamente escolhida. Porém, como em nosso modelo ocorre $r(S, a(T)) \in Q(r(S, a(T)), a(T))$, levamos em consideração a existência de um viés em relação à escolha de $r(S, a(T))$.

A Parte I combina elementos do modelo Revealed (P)Reference Theory de Ok, Ortoleva e Riella (2011), do modelo Aspiration-Based Choice Theory de Guney, Richter e Tsur (2011) e do modelo Rational Choice Theory with Status Quo Bias de Masatlioglu e Ok (2005) .

A Parte I está estruturada do seguinte modo. Na Seção Escolha Dependente de Referência com Aspirações apresentamos o arcabouço do modelo, seus axiomas e seus principais resultados. Na Seção Propriedades do Modelo apresentamos algumas das propriedades do comportamento de escolha do agente descrito pelo modelo. Na Seção Extensão do Modelo apresentamos uma variação do arcabouço original que incorpora o caso de correspondências de escolhas. Na Seção Observações Finais apresentamos algumas conclusões a respeito de nosso modelo e sugerimos algumas aplicações e direções de pesquisa.

3 Escolha Dependente de Referência com Aspirações

3.1 O Arcabouço do Modelo

Vamos representar por X o conjunto finito de todas as alternativas. Vamos considerar $\mathcal{C}(X) := \{S : \varnothing \neq S \subseteq X\}$ a classe de todos os subconjuntos de X não vazios e $\mathcal{P}(X) := \{(S, T) : \varnothing \neq S \subseteq T \subseteq X\}$ a classe formada por todos os problemas de escolha que o agente pode enfrentar. Interpretamos um problema de escolha $(S, T) \in \mathcal{P}(X)$ do seguinte modo: T é o conjunto potencial, formado por todas as alternativas que o agente considera que, a princípio, pode obter e S é o conjunto de todas as alternativas que o agente consegue efetivamente obter. Vamos chamar de $T \backslash S$ de conjunto fantasma, formado por todas as alternativas que não podem ser de fato obtidas pelo agente. Consideramos um agente cujo procedimento de escolha pode ser influenciado por alternativas fantasmas.

Definição 1. Uma função de escolha $c : (S, T) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ é uma função tal que $c(S, T) \in S$ para cada problema $(S, T) \in \mathcal{P}(X)$.

A função de escolha c é um procedimento utilizado pelo agente para escolher uma alternativa factível $c(S, T)$ em cada problema de escolha (S, T).

3.2 Axiomas

Nossa primeira hipótese é a de que na ausência de alternativas fantasmas, o agente age de modo racional tal como no modelo tradicional de Preferência Revelada.

Axioma 1. ***(WARP)*** *Dados* $(S,S),(T,T) \in \mathcal{P}(X)$ *tais que* $S \subseteq T$*, se* $c(T,T) \in S$*, então* $c(S,S) = c(T,T)$*.*

Convém observar que a Teoria da Escolha com base na Preferência Revelada coincide com nosso modelo nas situações em que o conjunto efetivo e o conjunto potencial são o mesmo conjunto, ou seja, nos casos em que não há alternativas fantasmas.

A hipótese a seguir assume que a aspiração é o único elemento do conjunto potencial de fato relevante para influenciar a escolha efetiva do agente.

Axioma 2. ***(Irrelevância dos Conjuntos Potenciais)*** *Dados* $(S,T_1),(S,T_2) \in \mathcal{P}(X)$ *tais que* $c(T_1,T_1) = c(T_2,T_2)$*, nós temos* $c(S,T_1) = c(S,T_2)$*.*

Conforme discutimos na Introdução, a referência é um elemento do conjunto efetivo que é mais saliente em relação aos outros elementos do conjunto, no sentido de que de acordo com algum critério estabelecido pelo agente, ela mais se assemelha à aspiração e afeta o comportamento de escolha da decisão do agente. Para capturar tal noção de saliência, apresentamos a definição seguinte.

Definição 2. Dado um conjunto arbitrário $T \in \mathcal{C}(X)$, definimos a relação de saliência $\succ_T \subseteq X \times X$ do seguinte modo: para cada $x, y \in X$ temos $x \succ_T y$ se $x \in T$ e existe algum $S \subseteq T$ com $y \in S$ tal que $x \neq c(S \cup \{x\}, T) \neq c(S,T)$ ou que $x = c(S \cup \{x\}, T)$, mas $x \neq c(S,T) = c(\{x, c(S,T)\}, \{x, c(S,T)\})$.

Intuitivamente dizemos que x é mais saliente que y se ocorrer uma de duas possibilidades: (a) a inserção de x em um problema do qual y já participa induz o agente a alterar seu comportamento de escolha original, mesmo que x não seja escolhido ao ser inserido no problema; (b) a inserção de x em um problema do qual y já participa induz o agente a escolher x, ainda que na ausência de considerações aspiracionais a escolha original seja revelada preferida em relação a x.

É natural a imposição da hipótese de que não podem ocorrer ciclos nas comparações de alternativas quanto a sua saliência.

Axioma 3. ***(Aciclicidade da Saliência)*** *Para cada* $T \in \mathcal{C}(X)$ *a relação* $\succ_T$ *é acíclica.*

A Aciclicidade da Saliência implica que se o agente considera que a alternativa x é uma referência melhor que a alternativa y e que y é uma referência melhor que a alternativa z, então ele não considera que z é uma referência melhor que x.

3.3 Resultado Principal

No Teorema a seguir estabelecemos o resultado básico de nosso modelo.

Teorema 1. *Uma função de escolha* $c : \mathcal{C}(X) \longrightarrow X$ *satisfaz WARP, Irrelevância dos Conjuntos Potenciais e Aciclicidade da Saliência se, e somente se, existem uma função injetiva* $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$*, uma função* a *:*

$\mathcal{C}(X) \longrightarrow X$, *uma função* $r : \mathcal{C}(X) \times X \longrightarrow X$, *uma correspondência* $Q : X \times X \rightrightarrows X$ *e uma métrica* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *tais que, para cada problema* $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$, *temos*

$$c(S,T) = \arg\max u(S \cap Q(r(S,a(T)),a(T))),$$

onde[1]

$$a(T) = \arg\max u(T)$$

e

$$r(S,a(T)) = \underset{x \in S}{\arg\min}\ d(x,a(T)).$$

Chamamos a terna ordenada $\langle u,d,Q\rangle$ de Modelo de Escolha com Referência Baseada em Aspiração. A função u é uma função utilidade usual que representa as preferências do agente na ausência de considerações aspiracionais. A métrica d é uma medida subjetiva de distância que mede a semelhança de cada ponto do conjunto efetivo com o ponto de aspiração. Dados $x,y,z \in T$ interpretamos $d(x,z) > d(y,z)$ como significando que a semelhança entre x e z é maior que a semelhança entre y e z. A correspondência Q delimita a região de atração gerada pela identificação dos pontos de referência e de aspiração. O modelo $\langle u,d,Q\rangle$ descreve o processo de escolha do seguinte modo. Fixe um problema de escolha (S,T) qualquer. O agente escolhe sua aspiração $a(T)$ ao maximizar sua utilidade u em T. Então, identifica sua referência $r(S,a(T))$ em S como o elemento com menor distância até $a(T)$. A partir de $r(S,a(T))$ e de $a(T)$, a atenção do agente é atraída para o conjunto $Q(r(S,a(T)),a(T))$. Finalmente, ele escolhe a alternativa que maximiza sua utilidade em $S \cap Q(r(S,a(T)),a(T))$.

3.4 Demonstração do Teorema 1

Vamos demonstrar apenas que os axiomas são suficientes para implicar na representação proposta, pois segue de argumentos padrão que a representação implica na validade dos axiomas.

Por WARP, a relação $\succcurlyeq \subseteq X^2$ definida por

$$x \succcurlyeq y \Longleftrightarrow \{x\} = c(\{x,y\},\{x,y\})$$

é uma ordem linear e para cada $(T,T) \in \mathcal{P}(X)$ temos $c(T,T) \succcurlyeq x$, para todos $x \in T$. Como X é finito, existe uma função injetiva $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que representa $\succcurlyeq$. Segue que para cada $T \in \mathcal{C}(X)$ nós temos $c(T,T)$ $= \arg\max u(T)$. Para cada $T \in \mathcal{C}(X)$ defina $a(T) = \arg\max u(T)$.

Seja $x \in X$ arbitrário. Defina $X_x = \{y \in X : u(x) \geq u(y)\}$ e $\mathcal{R}_x = \{(x,y) : y \in X_x\}$. Por Aciclicidade da Saliência a relação $tran(\succ_{X_x}) \cup \Delta_X \subseteq X^2$ é uma ordem parcial e pelo Teorema de Szpilrajn existe uma ordem linear $\succcurlyeq_x^*$ que estende $tran(\succ_{X_x}) \cup \Delta_X$. Defina $\widehat{\succcurlyeq}_x := \succcurlyeq_x^* \cup \mathcal{R}_x$ e note que $\widehat{\succcurlyeq}_x$ é uma ordem linear. Como X é finito, então existe uma função $v_x : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que representa $\widehat{\succcurlyeq}_x$ e que é injetiva. Para cada $S \in \mathcal{C}(X)$ defina $r(S,x) := \arg\max v_x(S)$.

Observe que para cada $T \in \mathcal{C}(X)$ temos $a(T) = a\left(X_{a(T)}\right)$, de modo que pela Irrelevância dos Conjuntos Potenciais para cada $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$ temos $c(S,T) = c\left(S,X_{a(T)}\right)$. Por isso, no desenvolvimento a seguir

[1] Dados um conjunto T e uma função injetiva $u : T \longrightarrow \mathbb{R}$, escrevemos $\arg\max(T)$ para representarmos o elemento $y \in T$ tal que $u(y) > u(x)$ para todos $x \in T\backslash\{y\}$.

vamos assumir sem perda de generalidade que os conjuntos T e $X_{a(T)}$ são idênticos.

Para cada $x, y \in X$ defina o conjunto

$$Q(x,y) = \left\{ z \in X : \; x \succ_{X_y} z \text{ e } z = c(\{x,z\}, X_y) \text{ ou } x \not\succ_{X_y} z \text{ e } z \in c(\{x,z\}, \{x,z\}) \right\}$$

e observe que $x \in Q(x,y)$.

Vamos desenvolver o argumento da demonstração em uma seqüência de afirmações.

Afirmação 1. *Sejam* $(S,T), \left(S', T\right) \in \mathcal{P}(X)$ *tais que* $S' \subseteq S$. *Se* $c(S,T), r(S, a(T)) \in S'$, *então* $c(S,T) = c\left(S', T\right)$

Demonstração. Escreva $S \backslash S' = \{x_1, ..., x_n\}$. Denote $S_1 = S \backslash \{x_1\}$ e suponha que $c(S,T) \neq c(S_1, T)$. Então, temos $x_1 \neq c(S,T) = c(S_1 \cup \{x_1\}, T) \neq c(S_1, T)$. Como $r(S, a(T)) \in S_1$, seguem que $x_1 \succ_T r(S, a(T))$ e $v_{a(T)}(x_1) > v_{a(T)}(r(S, a(T)))$, o que é um absurdo. Segue que $c(S,T) = c(S_1, T)$ e $\{c(S_1, T), r(S, a(T))\} \subseteq S_2 := S_1 \backslash \{x_2\}$. Aplicando argumento análogo iterativamente, obtemos o resultado afirmado. $\|$

Afirmação 2. *Dado* $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$, *escreva* $r = r(S, a(T))$. *Se* $x \in Q(r, a(T))$, *então,* $x = c(\{x, r\}, T)$.

Demonstração. Se $x = r$, então é óbvio que $x = c(\{x,r\}, T)$.

Considere que $x \neq r$ e suponha que $r = c(\{x,r\}, T)$. De $x \in Q(r, a(T))$ decorre que $x = c(\{x,r\}, \{x,r\})$ e $r \not\succ_T x$. De $r = c(\{x,r\}, T)$ e $r \neq c(\{r,x\}, \{r,x\})$ decorre que $r \succ_T x$, o que contradiz $r \not\succ_T x$. Logo, se $x \neq r(S, a(T))$, então $x = c(\{x, r(S, a(T))\}, T)$. $\|$

Afirmação 3. *Para* $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$ *temos* $c(S,T) \in Q(r(S, a(T)), a(T))$.

Demonstração. Escreva $r = r(S, a(T))$. Se $c(S,T) = r$, então $c(S,T) \in Q(r, a(T))$. Assuma que $c(S,T) \neq r$. Pela Afirmação 1, $c(S,T) = c(\{c(S,T), r\}, T)$. Se $r \succ_T c(S,T)$, então $c(S,T) \in Q(r, a(T))$.

Considere que $r \not\succ_T c(S,T)$ e $c(S,T) \neq c(\{c(S,T), r\}, \{c(S,T), r\})$. Seguem que $r = c(\{c(S,T), r\}, \{c(S,T), r\})$ e $c(S,T) = c(\{r, c(S,T)\}, T) \neq c(\{c(S,T), r\}, \{c(S,T), r\})$. Logo, $c(S,T) \succ_T r$, o que contradiz $v_{a(T)}(c(S,T)) \not> v_{a(T)}(r)$. Concluímos que se $r \not\succ_T c(S,T)$, então $c(S,T) = c(\{c(S,T), r\}, \{c(S,T), r\})$ e $c(S,T) \in Q(r(S, a(T)), a(T))$. $\|$

Afirmação 4. *Para* $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$ *temos* $c(S,T) = \arg\max u(S \cap Q(r(S, a(T)), a(T)))$.

Demonstração. Escreva $r = r(S, a(T))$. Seja $x \in S \cap Q(r, a(T))$ qualquer. Pela Afirmação 3 temos $c(S,T) \in Q(r, a(T))$. Pela Afirmação 1 temos $c(S,T) = c(\{x, r, c(S,T)\}, T)$ e pela Afirmação 2 temos $x = c(\{x,r\}, T)$. Se $c(S,T) \neq c(\{c(S,T), x\}, \{c(S,T), x\})$, então $c(S,T) = c(\{x, r, c(S,T)\}, T) \neq x = c(\{x,r\}, T)$ implica que $c(S,T) \succ_T r$, o que contradiz a maximalidade de $r(S, a(T))$ de acordo com $\succ_T$. Concluímos que $c(S,T) = c(\{c(S,T), x\}, \{c(S,T), x\})$ e $u(c(S,T)) > u(x)$ para todos $x \in S \cap Q(r(S, a(T)), a(T))$ com $x \neq c(S,T)$. $\|$

Defina a função $\widehat{d} : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ fazendo

$$\widehat{d}(x,y) := \begin{cases} v_x(x) - v_x(y), \text{ se } u(x) \geq u(y) \\ v_y(y) - v_y(x), \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

A função $\widehat{d}$ é reflexiva e simétrica. O teorema principal em Richter (2010), garante a existência de uma métrica $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ tal que para cada $x, y, z, w \in X$ ocorre

$$\hat{d}(x,y) \geq \hat{d}(z,w) \text{ se, e somente se, } d(x,y) \geq d(z,w) \qquad (*)$$

Afirmação 5. *Para cada* $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$ *temos* $r(S, a(T)) = \underset{x \in S}{\arg\min}\ d(x, a(T))$.

Demonstração. Por $(*)$ temos $\underset{x \in S}{\arg\min}\, d(x, a(T)) = \underset{x \in S}{\arg\min}\, \hat{d}(x, a(T))$. Além disso, para quaisquer $x, y \in S$ temos

$$\begin{array}{ccc} \hat{d}(x, a(T)) & \leq & \hat{d}(y, a(T)) \\ & \Longleftrightarrow & \\ v_{a(T)}(a(T)) - v_{a(T)}(x) & \leq & v_{a(T)}(a(T)) - v_{a(T)}(y) \\ & \Longleftrightarrow & \\ v_{a(T)}(x) & \geq & v_{a(T)}(y). \end{array}$$

Isto implica que $\underset{x \in S}{\arg\min}\hat{d}(x, a(T)) = \arg\max v_{a(T)}(S) = r(S, a(T))$. ‖

Isto completa a demonstração do teorema.

■

4 Propiedades do Modelo

Nesta seção apresentamos algumas propriedades das funções de escolha que são representadas por um modelo de Modelo de Escolha com Referência Baseado em Aspirações. Seja $\langle u, d, Q \rangle$ o modelo que representa c

Uma propriedade natural do modelo é que em problemas nos quais todas as alternativas potenciais estão efetivamente disponíveis, o agente simplesmente escolhe aquela que maximiza seu bem estar, livre de quaisquer restrições que o levem a tomar considerações aspiracionais .

Proposição 1. *Para qualquer* $T \in \mathcal{C}(X)$*, temos* $c(T,T) = a(T) = \arg\max u(T)$.

Demonstração. Temos $a(T) = \arg\max u(T)$ e $c(T,T) = \arg\max u(T \cap Q(r(T, a(T)), a(T)))$. É imediato que $r(T, a(T)) = a(T)$, de modo que $c(T,T) = \arg\max u(T \cap Q(a(T), a(T)))$.

Além disso, temos $r(\{a(T)\}, a(T)) = a(T)$ e $a(T) = c(\{a(T)\}, T) = \arg\max u(\{a(T)\} \cap Q(r(\{a(T)\}, a(T)), a(T)))$, então $a(T) \in Q(a(T), a(T))$. Logo, $u(c(T,T)) = u(a(T))$ e pela injetividade de u temos $c(T,T) = a(T)$. ‖

Nossa interpretação do modelo estabelece que se x é uma referência melhor do que y em relação ao conjunto potencial T, então ele considera que a semelhança entre x e $a(T)$ é maior que a semelhança entre y e $a(T)$. Nossa interpretação é formalizada pelo resultado a seguir.

Proposição 2. *Sejam $T \in \mathcal{C}(X)$ e $x, y \in T$. Se $x \succ_T y$, então $d(x, a(T)) < d(y, a(T))$.*

Demonstração. Escreva $r = r(S, a(T))$. Seja qualquer $S \subseteq T$ tal que $y \in S$. Suponha que $d(x, a(T)) \geq d(y, a(T))$.

Assim, $r(S \cup \{x\}, a(T)) = r$ e $c(S \cup \{x\}, T) = \arg\max u((S \cup \{x\}) \cap Q(r, a(T)))$. Além disso, temos $c(S,T) = \arg\max u \ (S \cap Q(r, a(T)))$. Se $x \neq c(S \cup \{x\}, T)$ então, $c(S \cup \{x\}, T) = c(S,T)$. Se $x = c(S \cup \{x\}, T)$, como $c(S,T) \in (S \cup \{x\}) \cap Q(r, a(T))$, então $u(x) \geq u(c(S,T))$ e $x = c(\{x, c(S,T)\}, \{x, c(S,T)\})$. Os dois casos implicam que $x \not\succ_T y$. ‖

Devido à possível incompletude de $\succ_T$, a Proposição 2 não implica que $d(x, a(T)) < d(y, a(T)) \Longrightarrow x \succ_T y$.

Dados $x, y, z \in X$ nós interpretamos $Q(x, y)$ como o conjunto das alternativas que atraem a atenção do agente quando x é uma referência e y é sua aspiração. Por isso, se na ausência de y a alternativa x não é escolhida e a inserção de y induz o agente a escolher x, então é natural intuir que y atua como uma referência que gera uma reavaliação de x. Esta intuição é formalizada na proposição a seguir.

Proposição 3. *Sejam $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$, $x \in S$ e $y \in T \backslash S$. Se $x = c(S \cup \{y\}, T)$ mas $x \neq c(S,T)$, então $y = r(S \cup \{y\}, a(T))$ e $x \in Q(r(S \cup \{y\}, a(T)), a(T))$.*

Demonstração. Observe que $x = c(S \cup \{y\}, T)$ e $x \neq c(S,T)$ implicam que $y \succ_T z$ para qualquer $z \in S$. Da Proposição anterior temos $d(y, a(T)) < d(z, a(T))$ para qualquer $z \in S$, do que segue que $y = \arg\min\limits_{z \in S \cup \{y\}} d(z, a(T)) = r(S \cup \{y\}, a(T))$. Como $c(S \cup \{y\}, T) = \arg\max u((S \cup \{y\}) \cap Q(r(S \cup \{y\}, a(T)), a(T)))$, então $x = c(S \cup \{y\}, T)$ implica que $x \in Q(r(S \cup \{y\}, a(T)), a(T))$. ‖

5 Extensão do Modelo

Na seção anterior desenvolvemos o modelo de Escolhas com Referência Baseadas em Aspirações para o caso em que ao enfrentar um problema de escolha da forma (S,T) o agente escolhe uma única alternativa. Nesta seção desenvolvemos o modelo para o caso em que para cada problema (S,T) o agente pode escolher um conjunto não unitário de alternativas. Dito de modo mais preciso, nesta seção assumimos que o agente emprega uma correspondência de escolha para decidir a solução de cada problema (S,T).

Definição 3. Uma correspondência de escolha $c : (S,T) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ é uma correspondência tal que para cada problema $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$ ocorre $\varnothing \neq c(S,T) \subseteq S$.

5.1 Axiomas

As versões de WARP e de Irrelevância dos Conjuntos Potenciais para correspondências de escolha são imediatas.

Axioma 4. ***(WARP)*** *Dados $(S,S), (T,T) \in \mathcal{P}(X)$ tais que $S \subseteq T$, se $c(T,T) \cap S \neq \varnothing$, então $c(S,S) = c(T,T) \cap S$.*

Axioma 5. ***(Irrelevância dos Conjuntos Potenciais)*** *Dados* $(S,T_1),(S,T_2)\in\mathcal{P}(X)$ *tais que* $c(T_1,T_1) = c(T_2,T_2)$, *nós temos* $c(S,T_1)=c(S,T_2)$.

A definição da relação de saliência para o caso de correspondência de escolhas é apresentada a seguir.

Definição 4. Para cada $T\in\mathcal{C}(X)$ defina a relação binária $\succ_T\subseteq X^2$ do seguinte modo: $x\succ_T y$ se, e somente se, existe $S\subseteq T$ com $y\in S$ tal que $\varnothing\neq c(S\cup\{x\},T)\setminus\{x\}\neq c(S,T)$ ou $x\in c(S\cup\{x\},T)\neq c(\{x\}\cup c(S,T),\{x\}\cup c(S,T))$.

A alternativa x é revelada ser mais saliente que a alternativa y em relação ao conjunto potencial T caso em que um dos dois fenômenos ocorra: (a) a inserção da presença de x a um problema no qual y já estava envolvido muda a escolha do agente, mesmo que x não seja a única alternativa escolhida no novo problema; (b) x é escolhido ao ser inserido a um problema no qual y já estava envolvido, mas existe alguma alternativa z que tenha sido escolhida no problema original que gera tanto bem estar quanto x.

Também vamos exigir aciclicidade da relação de saliência no caso de correspondências de escolha.

Axioma 6. ***(Aciclicidade da Saliência)*** *Para cada* $T\in\mathcal{C}(X)$, *a relação* $\succ_T$ *é acíclica.*

5.2 Representação da Correspondência de Escolha

No Teorema a seguir apresentamos as condições necessárias e suficientes para a representação da correspondência de escolha.

Teorema 2. *Uma correspondência de escolha* $c:\mathcal{P}(X)\rightrightarrows X$ *satisfaz os Axiomas WARP, Irrelevância dos Conjuntos Potenciais e Aciclicidade da Saliência se, e somente se, existem uma função* $u:X\longrightarrow\mathbb{R}$, *uma correspondência* $Q:X\times\mathcal{C}(X)\rightrightarrows X$ *e funções injetivas* $v_{a(T)}:X\longrightarrow\mathbb{R}$ *para cada* $T\in\mathcal{C}(X)$, *tais que para cada* $(S,T)\in\mathcal{P}(X)$

$$c(S,T)=\arg\max u\left(S\cap Q\left(r\left(S,a(T)\right),a(T)\right)\right)$$

onde

$$a(T)=\arg\max u(T)$$

$$r(S,a(T))=\arg\max_{x\in S} v_{a(T)}(x)$$

$$a(T)\subseteq Q\left(r\left(S,a(T)\right),a(T)\right)$$

e

$$r(T,a(T))=a(T)$$

A interpretação do modelo é essencialmente a mesma do caso em que o agente emprega funções de escolha, mas apresenta alguns detalhes distintos do caso anterior. A função u é uma função utilidade que descreve as preferências do agente em relação ao espaço total de alternativas e ao contrário do caso anterior, não é necessariamente injetiva. Dado o problema (S,T) a função $v_{a(T)}$ descreve a ordenação das alternativas quanto a sua semelhança com as aspirações no conjunto $a(T)$. Neste caso, $v_{a(T)}(x)>v_{a(T)}(y)$ significa que, de acordo com as aspirações identificadas no conjunto $a(T)$, a proximidade de x com o conjunto $a(T)$ é maior do que a proximidade entre y e o conjunto $a(T)$. A função $v_{a(T)}$ desempenha em T um papel análogo ao da métrica d do caso anterior, com a desvantagem de que d não depende do problema específico. No caso em questão, o agente pode identificar um conjunto $a(T)$ não unitário de aspirações. E o conjunto $Q(r(S,a(T)),a(T))$ incorpora as alternativas em relação às quais a atenção do agente é atraída devido à presença da referência $r(S,a(T))$ e das aspirações em $a(T)$.

Demonstração do Teorema 2. Vamos demonstrar apenas a parte relativa à suficiência dos Axiomas para a representação afirmada, pois a parte de sua necessidade segue de argumentos padrão.

Por WARP for Aspirations, a relação $\succsim \subseteq X^2$ definida por

$$x \succsim y \Longleftrightarrow x \in c(\{x,y\},\{x,y\})$$

é uma pré-ordem completa e para cada $(T,T) \in \mathcal{P}(X)$ temos $c(T,T) = Maximal(T,\succsim)$. Como X é finito, existe uma função $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que representa $\succsim$. Segue que para cada $T \in \mathcal{C}(X)$ temos $c(T,T) = \arg\max u(T)$. Para cada $T \in \mathcal{C}(X)$ defina $a(T) = \arg\max u(T)$. Convém notar que ao contrário do caso em que c era uma função de escolha, aqui $a(T)$ pode ser conjunto não unitário e u não necessariamente é função injetiva.

Seja $T \in \mathcal{C}(X)$ arbitrário. Defina $X_{a(T)} = \{x \in X : u(a) \geq u(x) \text{ para qualquer } a \in a(T)\}$ e $\mathcal{R}_{a(T)} = \bigcup_{a \in a(T)} \left\{(a,x) : x \in X_{a(T)}\right\}$. Por Aciclicidade da Saliência, a relação $Tran\left(\succ_{X_{a(T)}}\right) \cup \Delta_X \subseteq X^2$ é uma ordem parcial. Segue do Teorema de Szpilrajn que existe uma ordem linear $\succsim^*_{a(T)}$ que estende $Tran\left(\succ_{X_{a(T)}}\right) \cup \Delta_X$. Defina $\succsim_{a(T)} := \succsim^*_{a(T)} \cup \mathcal{R}_{a(T)}$ e observe que $\succsim_{a(T)}$ é ordem linear em X .Como X é finito, então existe uma função $v_{a(T)} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que representa $\succsim_{a(T)}$ e que é injetiva em X. Observe também que $a(T) = a\left(X_{a(T)}\right)$, de modo que pela Irrelevância dos Conjuntos Potenciais, no desenvolvimento a seguir vamos assumir sem perda de generalidade que os conjuntos T e $X_{a(T)}$ são idênticos.

Seja $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$ qualquer. Defina $r(S,a(T)) = \arg\max v_{a(T)}(S)$. Observe que devido à injetividade de $v_{a(T)}$, nós temos $|r(S,a(T))| = 1$.

Para cada $y \in X$ e para cada $A \in \mathcal{C}(X)$ definimos

$$Q(y,A) := \{x \in X : \ y \succ_{X_A} x \text{ e } x \in c(\{x,y\},A) \text{ ou } y \not\succ_{X_A} x \text{ e } x \in c(\{x,y\},\{x,y\})\}$$

É imediato que $r(S,a(T)) \in Q(r(S,a(T)),a(T))$ e que $a(T) \subseteq Q(r(S,a(T)),a(T))$.

Afirmação 6. *Sejam* $(S,T), \left(S',T\right) \in \mathcal{P}(X)$ *tais que* $S' \subseteq S$. *Dados quaisquer* $x \in c(S,T)$, *se* $\{x, r(S,a(T))\} \subseteq S'$, *então* $x \in c\left(S',T\right)$.

Demonstração. Escreva $S \backslash S' = \{y_1,...,y_n\}$, denote $S_1 = S \backslash \{y_1\}$ e suponha que $x \notin c(S_1,T)$. Como $x \in c(S_1 \cup \{y_1\},T) \setminus \{y_1\}$, então temos $\varnothing \neq c(S_1 \cup \{y_1\},T) \setminus \{y_1\} \neq c(S_1,T)$. Como $r(S,a(T)) \in S_1$, isto implica que temos $y_1 \succ_T r(S,a(T))$, o que é um absurdo. Segue que $x \in c(S_1,T)$ e $\{x, r(S,a(T))\} \subseteq S' \subseteq S_1 \setminus \{y_2\}$. Aplicando argumento análogo iterativamente, obtemos o resultado afirmado. ||

Afirmação 7. *Dado* $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$, *escreva* $r = r(S,a(T))$. *Se* $x \in Q(r,a(T))$, *então* $x \in c(\{x,r\},T)$.

Demonstração. Se $x = r(S,a(T))$, então $x \in c(\{x, r(S,a(T))\},T)$. Considere que $x \neq r(S,a(T))$ e $\{r(S,a(T))\} = c(\{x,r(S,a(T))\},T)$. Como $x \in Q(r(S,a(T)),a(T))$, seguem que $x \in c(\{x,r(S,a(T))\},\{x,r(S,a(T))\})$

e $r(S,a(T)) \not\succ_T x$. De $\{r(S,a(T))\} = c(\{x, r(S,a(T))\}, T)$ e $\{r(S,a(T))\} \neq c(\{r(S,a(T)), x\}, \{r(S,a(T)), x\})$ decorre que $r(S,a(T)) \succ_T x$, o que contradiz $r(S,a(T)) \not\succ_T x$. ‖

Afirmação 8. *Para qualquer* $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$ *temos* $c(S,T) \subseteq Q(r(S,a(T)), a(T))$.

Demonstração. Seja qualquer $x \in c(S,T)$. Se $x = r(S,a(T))$, então $x \in Q(r(S,a(T)), a(T))$. Vamos assumir que $x \neq r(S,a(T))$ e escrever $r = r(S,a(T))$. A Afirmação 6 implica que $x \in c(\{x,r\}, T)$. Se $r \succ_T x$, então $x \in Q(r(S,a(T)), a(T))$.

Suponha que $r \not\succ_T x$ e $x \notin c(\{x,r\}, \{x,r\})$, de modo que $\{r\} = c(\{x,r\}, \{x,r\})$. Então, $x \in c(\{r,x\}, T) \neq c(\{x,r\}, \{x,r\})$ e $x \succ_T r$, o que contradiz o fato de que $v_{a(T)}(r) > v_{a(T)}(x)$. Logo, se $r \not\succ_T x$, então $x \in c(\{x,r\}, \{x,r\})$. Portanto, $x \in Q(r(S,a(T)), a(T))$. ‖

Afirmação 9. *Para cada* $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$, $c(S,T) = \arg\max u(S \cap Q(r(S,a(T)), a(T)))$.

Demonstração. Sejam $x \in c(S,T)$ e $y \in S \cap Q(r(S,a(T)), a(T))$ arbitrários. Vamos escrever $r = r(S,a(T))$. Pela Afirmação 8 sabemos que $x \in Q(r(S,a(T)), a(T))$. Pela Afirmação 6 temos $x \in c(\{x,y,r\}, T)$ e pela Afirmação 7 temos $y \in c(\{y,r\}, T)$. Suponha que $x \notin c(\{x,y\}, \{x,y\})$.

Por WARP For Aspirations, segue $x \notin c(\{x\} \cup c(\{y,r\}, T), \{x\} \cup c(\{y,r\}, T))$. Então, $x \in c(\{y,r\} \cup \{x\}, T) \neq c(\{x\} \cup c(\{y,r\}, T), \{x\} \cup c(\{y,r\}, T))$ e $x \succ_T r$, o que é um absurdo. Logo, $x \in c(\{x,y\}, \{x,y\})$ e $u(x) \geq u(y)$. Concluímos que $c(S,T) \subseteq \arg\max u(S \cap Q(r(S,a(T)), a(T)))$.

Sejam $x \in c(S,T)$ e $y \in \arg\max u(S \cap Q(r(S,a(T)), a(T)))$ arbitrários. Pelo argumento anterior temos $x \in \arg\max u(S \cap Q(r(S,a(T)), a(T)))$ e $\{x,y\} = c(\{x,y\}, \{x,y\})$.

Considere $r \succ_T y$ e $y \in c(\{y,r\}, T)$. Como $\{x\} \cup c(\{y,r\}, T) \subseteq S \cap Q(r(S,a(T)), a(T))$, então WARP implica que $y \in c(\{x\} \cup c(\{y,r\}, T), \{x\} \cup c(\{y,r\}, T))$. Além disso, pela Afirmação 6 temos $x \in c(\{x,y,r\}, T)$. Se $y \notin c(\{x,y,r\}, T)$, então $x \in c(\{y,r\} \cup \{x\}, T) \neq c(\{x\} \cup c(\{y,r\}, T), \{x\} \cup c(\{y,r\}, T))$ e $x \succ_T r$, o que é uma contradição. Segue que $y \in c(\{x,y,r\}, T)$. Se $S = \{x,y,r\}$, então $y \in c(S,T)$. Suponha que $S = \{x,y,r\} \cup \{z\}$, mas que $y \notin c(S,T)$. Seguem que $x \in c(\{x,y,r\} \cup \{z\}, T) \setminus \{z\} \neq c(\{x,y,r\}, T)$ e $z \succ_T r$, o que é uma contradição. Logo, $y \in c(S,T)$. Prosseguindo com este argumento iterativamente, concluímos que se $r \succ_T y$ e $y \in c(\{y,r\}, T)$, então $y \in c(S,T)$.

Considere que $r \not\succ_T y$ e $y \in c(\{y,r\}, \{y,r\})$. Se $y \notin c(\{y,r\}, T)$, então $r \in c(\{y,r\}, T) \neq c(\{y,r\}, \{y,r\})$, o que implica que $r \succ_T y$, uma contradição. Concluímos que se $r \not\succ_T y$ e $y \in c(\{y,r\}, \{y,r\})$, então $y \in c(S,T)$.

Portanto, $\arg\max u(S \cap Q(r(S,a(T)), a(T))) \subseteq c(S,T)$. ‖

Isto conclui a demonstração do teorema.

■

5.3 Propriedades

As propriedades de uma função de escolha representada por um Modelo de Escolha com Referência Baseada em Aspirações se estendem com as adaptações adequadas para uma corrspondência de escolha representada por $\left\langle u, \left\{v_{a(T)}\right\}_{T\in\mathcal{C}(X)}, Q\right\rangle$. Apresentamos a seguir as propriedades de uma correspondência de escolha c representada por $\left\langle u, \left\{v_{a(T)}\right\}_{T\in\mathcal{C}(X)}, Q\right\rangle$.

Proposição 4. *Para qualquer $T \in \mathcal{C}(X)$ temos $c(T,T) = a(T) = \arg\max u(T)$.*

Demonstração. Observe que $a(T) \subseteq Q(r(T, a(T)), a(T)) = Q(a(T), a(T))$, de modo que $a(T) = \arg\max u(T)$ $\subseteq \arg\max u(T \cap Q(a(T), a(T))) = c(T,T)$. Temos $a(a(T)) = a(T)$ e $r(a(T), a(a(T))) = a(a(T))$.

Então, $c(a(T), a(T)) = \arg\max u(a(T) \cap Q(a(T), a(T)))$. Seja $a_0 \in c(a(T), a(T))$ qualquer. Logo, $a_0 \in T \cap Q(a(T), a(T))$ e $a_0 \in a(T) = \arg\max u(T)$. Segue que para qualquer $x \in c(T,T)$ ocorrem $u(x)$ $\geq u(a_0) = \max u(T)$ e $x \in \arg\max u(T) = a(T)$. $\|$

Proposição 5. *Sejam $T \in \mathcal{C}(X)$ e $x, y \in T$. Se $x \succ_T y$, então $v_T(x) > v_T(y)$.*

Demonstração. Seja qualquer $S \subseteq T$ tal que $y \in S$ e $v_T(x) \leq v_T(y)$. Assim, $r(S \cup \{x\}, a(T)) = r(S, a(T))$ e $c(S \cup \{x\}, T) = \arg\max u((S \cup \{x\}) \cap Q(r(S, a(T)), a(T)))$.

Se $x \notin c(S \cup \{x\}, T)$, então $c(S \cup \{x\}, T) \setminus \{x\} = c(S,T)$.

Considere que o caso em que $x \in c(S \cup \{x\}, T)$. Temos $u(x) = u(z) \geq u(w)$ para todos $z \in c(S \cup \{x\}, T) \setminus \{x\}$. Deste modo, $c(S \cup \{x\}, T) \subseteq c(\{x\} \cup c(S,T), \{x\} \cup c(S,T))$. Para qualquer $z \in c(\{x\} \cup c(S,T), \{x\} \cup c(S,T))$ temos $u(z) \geq u(x)$ e $z \in c(S \cup \{x\}, T)$, de modo que $c(\{x\} \cup c(S,T), \{x\} \cup c(S,T)) \subseteq c(S \cup \{x\}, T)$. Segue que $c(\{x\} \cup c(S,T), \{x\} \cup c(S,T)) = c(S \cup \{x\}, T)$. Os dois casos implicam que $x \not\succ_T y$. $\|$

Proposição 6. *Sejam $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$, $x \in S$ e $y \in T \backslash S$. Se $x \in S \backslash c(S,T)$ e $x \in c(S \cup \{y\}, T)$, então $y \in r(S \cup \{y\}, a(T))$ e $x \in Q(r(S \cup \{y\}, a(T)), a(T))$.*

Demonstração. Observe que $x \in c(S \cup \{y\}, T)$ e $x \notin c(S,T)$ implicam que $y \succ_T z$ para qualquer $z \in S$. Da Proposição anterior temos $v_T(y) > v_T(z)$ para qualquer $z \in S$ e então $y \in r(S \cup \{y\}, a(T))$.

Como $c(S \cup \{y\}, T) = \arg\max u((S \cup \{y\}) \cap Q(r(S \cup \{y\}, a(T)), a(T)))$, então $x \in c(S \cup \{y\}, T)$ implica que $x \in Q(r(S \cup \{y\}, a(T)), a(T))$. $\|$

6 Observações Finais

Apresentamos nesta parte uma axiomatização para a teoria de preferência revelada a respeito do comportamento de escolhas com referência baseado em aspirações. O modelo que apresentamos amplia o escopo apresentado por Guney, Richter e Tsur (2011) e Ok, Ortoleva e Riella (2011). Em Guney, Richter e Tsur (2011) o agente escolhe a alternativa que minimiza a distância ao seu ponto de aspiração. Aqui a alternativa que minimiza a distância até o ponto de aspiração - o ponto de referência - afeta o modo como o agente escolhe sua decisão, e ela pode ou não ser a alternativa escolhida. O ponto de referência é determinado endogenamente a partir das propriedades que que caracterizam o comportamento inerente ao agente.

Uma restrição do modelo aqui apresentado é que o espaço das alternativas é um conjunto finito. Uma direção de pesquisa é estender a análise aqui desenvolvida para o caso em que o espaço de alternativas é infinito, por exemplo para o caso em que o espaço de alternativas é um espaço métrico.

Estudos experimentais recentes (Pettibone e Wedell (2007)) sugerem que à medida que a distância entre o ponto de aspiração e o ponto de referência aumenta, o conjunto de alternativas atraídas pelo ponto de referência torna-se maior. Pesquisa futura deverá considerar a axiomatização de um modelo que explique este e outras observações.

Parte III

APLICAÇÕES DA TEORIA DA P(R)EFERÊNCIA REVELADA COM ASPIRAÇÕES

7 Introdução

Na parte anterior desenvolvemos um modelo que explica o comportamento de um agente que executa seu processo de escolha do seguinte modo. Dado um conjunto T de alternativas potenciais ele identifica a alternativa $a(T)$, seu ponto de aspiração, que maximiza seu bem estar em T. No caso em que a aspiração não esteja disponível para o agente, ele identifica no conjunto $S \subseteq T$ de alternativas efetivamente disponíveis, a alternativa $r(S, a(T))$ que mais se assemelha à aspiração $a(T)$. A alternativa $r(S, a(T))$ é chamada de ponto de referência devido ao seu poder de atrair a atenção do agente para um conjunto $Q(r(S, a(T)), a(T))$ que atualiza a restrição sob a qual o agente executa seu processo de escolha. Finalmente, o agente escolhe a alternativa $c(S,T)$ que maximiza seu bem estar em $S \cap Q(r(S, a(T)), a(T))$. Naquele artigo também consideramos a possibilidade de que o agente identifique um conjunto não unitário $a(T)$ de pontos de aspiração e decida escolher um conjunto $c(S,T)$ de alternativas que maximizem seu bem estar em $S \cap Q(r(S, a(T)), a(T))$.

Um problema de escolha do agente é um par (S,T) onde $\varnothing \neq S \subseteq T \subseteq X$ e X é o espaço total de alternativas. Denotamos por $\mathcal{C}(X) := \{S : \varnothing \neq S \subseteq X\}$ a classe de todos os subconjuntos de X não vazios e por $\mathcal{P}(X) := \{(S,T) : \varnothing \neq S \subseteq T \subseteq X\}$ a classe formada por todos os problemas de escolha que o agente pode enfrentar. Uma função de escolha $c : (S,T) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ é uma função tal que para cada problema $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$ temos $c(S,T) \in S$.

Um Modelo de Escolha com Referência Baseada em Aspiração é uma terna $\langle u, d, Q \rangle$ na qual $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função utilidade, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma métrica em X e $Q : X \times X \rightrightarrows X$ é uma correspondência tais que para cada problema $(S,T) \in \mathcal{P}(X)$ temos

$$c(S,T) = \arg\max u(S \cap Q(r(S, a(T)), a(T))),$$

onde

$$a(T) = \arg\max u(T)$$

e

$$r(S, a(T)) = \underset{x \in S}{\arg\min}\ d(x, a(T)).$$

No presente trabalho apresentamos algumas aplicações do modelo descrito por $\langle u, d, Q \rangle$ a tópicos tradicionais da teoria microeconômica. Na Seção Equilíbrio Geral com Referência Baseado em Aspirações aplicamos nosso arcabouço ao modelo de equilíbrio geral em economia de trocas puras. Na Seção Equilíbrio de Nash com Referência Baseado em Aspirações aplicamos nosso arcabouço a um jogo com finitos agentes e apresentamos uma versão aspiracional com referência do equilíbrio de Nash.

8 Equilíbrio Geral com Referência Baseado em Aspirações

Na abordagem convencional da teoria de equilíbrio geral em economias de trocas puras, cada agente participa do processo de trocas levando em conta apenas a restrição dada pelo seu próprio conjunto orçamentário. Porém, podemos considerar a situação em que cada um dos agentes pode levar em conta o que cada um dos outros agentes pode adquirir.

Dito de modo mais específico, cada agente α pode aspirar ao consumo de uma cesta de bens a_α que esteja disponível a algum dos outros agentes, ainda que para si próprio tal cesta seja inexequível, isto é, não pertença ao seu conjunto orçamentário S_α. No caso em que a cesta aspirada esteja fora do suas possibilidades orçamentárias, ele pode identificar a cesta factível $r_\alpha \in S_\alpha$ que mais se assemelha à cesta aspirada. A cesta r_α pode induzir algum tipo de viés no agente, que restringe sua atenção a um conjunto de cestas $Q_\alpha(r_\alpha)$ determinado por r_α e participa das trocas visando à maximização de seu bem estar em $S_\alpha \cap Q_\alpha(r_\alpha)$. Devido ao fato de que cada um dos agentes está participando do mercado seguindo este procedimento de escolha, cabe considerarmos a possibilidade da existência de algumas condições que garantam a existência de um sistema de preços p que equilibre todos os mercados no sentido de que não exista excesso de demanda agregada em nenhum deles.

8.1 O Arcabouço do Modelo

Vamos considerar uma economia constituída por um conjunto finito de agentes A. Dados $p \in \mathbb{R}^n_+$ um vetor de preços e representando por $\omega_\alpha \in \mathbb{R}^n_+$ um vetor de dotações do agente $\alpha \in A$, o conjunto factível de α é seu conjunto orçamentário $S_\alpha(p, \omega_\alpha) = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : p \cdot x \leq p \cdot \omega_\alpha\right\}$ e seu conjunto potencial é $T\left(p, (\omega_\beta)_{\beta \in A}\right)$ $= \bigcup\limits_{\beta \in A} S_\alpha(p, \omega_\beta)$. Note que todos os agentes possuem o mesmo conjunto potencial. O conjunto potencial é o conjunto de todas as cestas de bens que estão disponíveis para pelo menos um dos participantes da economia e é o conjunto que cada agente leva em consideração ao identificar sua aspiração.

Observação 1. *Considere um vetor de preços arbitrário $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ e uma lista de $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ de cestas de dotações dos agentes que participam da economia. Escolha qualquer agente α_0 tal que $p \cdot \omega_{\alpha_0} \geq p \cdot \omega_\alpha$ para todos $\alpha \in A$. Então, é imediato que $T\left(p, (\omega_\alpha)_{\alpha \in A}\right) = S_{\alpha_0}(p, \omega_{\alpha_0})$. Logo, $r_{\alpha_0}(p) = a_{\alpha_0}(p)$. Portanto, o conjunto $T\left(p, (\omega_\alpha)_{\alpha \in A}\right)$ é o conjunto orçamentário do agente mais rico da economia e para este agente seu problema de escolha está livre de considerações aspiracionais.*

No que segue vamos assumir que cada agente α possui uma dotação inicial ω_α fixa, de modo que podemos considerar $S_\alpha(p,\omega_\alpha) = S_\alpha(p)$ e $T\left(p,(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}\right) = T(p)$.

O conjunto de problemas de escolha do agente α é $\mathcal{P}_\alpha = \left\{(S_\alpha(p), T(p)) : p \in \mathbb{R}^n_{++}\right\}$ e a função de escolha de α é uma função $c_\alpha : \mathcal{P}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$ tal que para cada $(S_\alpha(p), T(p)) \in \mathcal{P}_\alpha$ temos $c_\alpha(S_\alpha(p), T(p)) \in S_\alpha(p)$. Um problema de escolha do agente é um par que envolve a restrição orçamentária que o agente enfrenta e o conjunto de cestas disponíveis para o agente mais rico. Uma função de escolha do agente descreve qual a cesta de consumo factível o agente escolhe ao ser confrontado com o conjunto potencial.

Assumimos que a função de escolha c_α de cada agente $\alpha \in A$ é representada por um Modelo de Escolha com Referência Baseado em Aspiração $\langle u_\alpha, \|\|, Q_\alpha\rangle$, de modo que para cada vetor de preços $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ temos

$$c_\alpha(S_\alpha(p), T(p)) = \arg\max u_\alpha(S_\alpha(p) \cap Q_\alpha(r_\alpha(p)))$$

onde

$$a_\alpha(p) = \arg\max u_\alpha(T(p))$$
$$r_\alpha(p) = \arg\min_{x\in S_\alpha(p)} \|x - a_\alpha(p)\|$$

e $u_\alpha : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função utilidade, $\|\|$ é a norma Euclidiana e $Q_\alpha : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$ é uma correspondência.

A interpretação do modelo é análoga àquela apresentada no artigo Teoria da P(R)eferência Revelada com Aspiração. Para cada agente α a função u_α representa as preferências de α sobre o espaço de consumo $\mathbb{R}^n_+$ e $\|\|$ é a métrica utilizada por α para mensurar a semelhança entre as cestas de consumo. Dado o vetor de preços p, $a_\alpha(p)$ é a escolha de α caso ele tivesse a oportunidade de dispor de todas as cestas potenciais (ou seja, se fosse o agente mais rico da economia), $r_\alpha(p)$ é a cesta efetivamente disponível a α que mais se assemelha à cesta aspirada e $Q_\alpha(r_\alpha(p))$ é o conjunto que descreve o viés induzido em α pela referência $r_\alpha(p)$. Após a atenção do agente α ser restrita ao conjunto $Q_\alpha(r_\alpha(p))$, o agente maximiza sua utilidade em $S_\alpha(p) \cap Q_\alpha(r_\alpha(p))$.

Vamos definir nossa versão de equilíbrio geral no caso em que o comportamento de escolha de cada agente da economia é descrito por um Modelo de Escolha com Referência Baseada em Aspiração.

Definição 5. Dizemos que o vetor de preços $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ é um equilíbrio Walrasiano com referência baseado em aspiração no caso em que para cada $\alpha \in A$ temos

$$c_\alpha(S_\alpha(p), T(p)) = \arg\max u_\alpha(S_\alpha(p) \cap Q_\alpha(r_\alpha(p)))$$
$$\sum_{\beta\in A} c_\beta(S_\beta(p), T(p)) = \sum_{\beta\in A} \omega_\beta$$

A Definição nos diz que um vetor de preços $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ é um equilíbrio Walrasiano com referência baseado em aspiração se ele induz uma coincidência entre demanda agregada e oferta agregada em todos os mercados de bens, enquanto cada agente está maximizando seu bem estar na restrição gerada pela referência e pela aspiração.

8.2 Existência de Equilíbrios Walrasianos com Referência Baseados em Aspirações

Nesta seção nos preocupamos com a questão da existência de um Equilíbrio Walrasiano com referência baseado em aspirações. Em virtude disso, para cada agente $\alpha \in A$ vamos assumir explicitamente a forma de sua correspondência Q_α. Mais especificamente vamos assumir que para cada agente α existe uma função $\varphi_\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ contínua, estritamente crescente e com $\varphi_\alpha(0) = 0$ tal que para qualquer cesta $y \in \mathbb{R}^n_+$ temos

$$Q_\alpha(y) = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : u_\alpha(x) - \varphi_\alpha(\|x-y\|) \geq u_\alpha(y)\right\} \qquad (*)$$

Dados o agente $\alpha \in A$ e a cesta $y \in \mathbb{R}_+$, interpretamos $Q_\alpha(y)$ do seguinte modo. Suponha que a cesta y seja tomada pelo agente como a sua cesta de referência. Interpretamos $\varphi_\alpha(\|x-y\|)$ como uma penalidade associada à cesta x que difere de y. Esta penalidade depende da intensidade da diferença entre x e y. A cesta x só merece a atenção do agente se, apesar da penalidade que lhe é imposta, ainda é capaz de gerar pelo menos tanto bem estar quanto y. Evidentemente, $y \in Q_\alpha(y)$. A hipótese de que a função φ_α é estritamente crescente que a penalidade imposta a cada cesta escolhida pelo agente aumenta à medida que ela torna-se cada vez mais distinta da cesta de referência. E a continuidade da função φ_α significa que as penalizações impostas às cestas que desviam-se da cesta de referência variam de maneira suave.

Observação 2. *Seja um agente $\alpha \in A$ com Q_α definido por $(*)$. Considere um vetor de preços $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ para o qual $a_\alpha(p) \in S_\alpha(p)$. Neste caso, temos $r_\alpha(p) = a_\alpha(p)$, $Q_\alpha(a_\alpha(p)) = \{a_\alpha(p)\}$ e $c^*_\alpha(p) = \arg\max u_\alpha(\{a_\alpha(p)\}) = a_\alpha(p) = \arg\max u_\alpha(S_\alpha(p))$.*

O teorema seguinte apresenta as condições que são suficientes para garantir a existência de um equilíbrio Walrasiano com referência baseado em aspirações.

Teorema 3. *Se para cada agente $\alpha \in A$ a função u_α é contínua, estritamente côncava, fortemente crescente e a correspondência $Q_\alpha : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$ é definida por $(*)$, onde a função φ_α é convexa, então existe um equilíbrio Walrasiano com referência baseado em aspirações.*

Observação 3. *A hipótese adicional de que para cada agente $\alpha \in A$ sua função penalidade φ_α é convexa implica haver uma aceleração da penalidade imposta às cestas que distinguem-se cada vez mais da cesta de referência. Além disso, estamos assumindo que a função utilidade u_α de cada agente $\alpha \in A$ seja estritamente côncava, enquanto na teoria tradicional de equilíbrio geral a função u_α é assumida ser estritamente quase-côncava. Nossa hipótese é, nesse sentido, uma hipótese mais forte do que a assumida usualemente.*

Demonstração do Teorema 3. Seja $\alpha \in A$ arbitrário. A correspondência $S_\alpha : \mathbb{R}^n_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$ é de valor-compacto, de valor-convexo, possui a propriedade de gráfico fechado e é contínua. Segue imediatamente que T é de valor compacto, de valor convexo e contínua.

Fixe $y \in \mathbb{R}^n_+$. A continuidade de u_α e de φ_α implica que $Q_\alpha(y)$ é fechado. Em particular, dado qualquer $p \in \mathbb{R}^n_+$ o fato de $Q_\alpha(r_\alpha(p))$ ser fechado implica que $S_\alpha(p) \cap Q_\alpha(r_\alpha(p))$ é compacto, pois é subconjunto fechado do compacto $S_\alpha(p)$.

Lema 1. *As funções $a_\alpha : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$ e $r_\alpha : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$, definidas respectivamente por $a_\alpha(p) = \arg\max u_\alpha(T(p))$ e $r_\alpha(p) = \underset{x \in S_\alpha(p)}{\arg\min} \|x - a_\alpha(p)\|$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^n_{++}$.*

Demonstração. Como u_α é contínua e estritamente quase-côncava e T é de valor compacto, então o Teorema de Weirstrass garante que a_α é uma função bem definida e o Teorema do Máximo implica que a_α é contínua em $\mathbb{R}^n_{++}$. Para cada $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ o conjunto $S_\alpha(p)$ é convexo, de modo que $\left|\underset{x \in S_\alpha(p)}{\arg\min} \|x - a_\alpha(p)\|\right| \leq 1$. Defina a função $\varphi : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ fazendo $\varphi(x,p) = \|x - a_\alpha(p)\|$. Como $\|\|$ e a_α são contínuas, segue que φ também é contínua. Como $S_\alpha(p)$ é compacto para qualquer $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, então o Teorema de Weirstrass implica que $\left| \underset{x \in S_\alpha(p,\omega_\alpha)}{\arg\min} \|x - a_\alpha(p)\| \right| = 1$e r_α é uma função bem definida. O Teorema do Máximo implica que r_α é contínua. $\|$

Defina a correspondência $S^*_\alpha : \mathbb{R}^n_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$ fazendo $S^*_\alpha(p) = S_\alpha(p) \cap Q_\alpha(r_\alpha(p))$.

Afirmação 10. *S^*_α é hemicontínua superior.*

Demonstração. Sejam $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, $(p^k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n_{++}$ convergindo para p e $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n_+$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ temos $x^k \in S_\alpha(p^k) \cap Q_\alpha(r_\alpha(p^k))$. Como S_α é hemicontínua superior, então existe uma subsequência de $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $x \in S_\alpha(p)$. Abusando da notação, vamos denotar esta subsequência também por $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$. A continuidade de r_α e de φ_α implica que $\left(u_\alpha(x^k) - \varphi_\alpha(\|x^k - r_\alpha(p^k)\|)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $u_\alpha(x) - \varphi_\alpha(\|x - r_\alpha(p)\|) \geq u_\alpha(r_\alpha(p))$. Concluímos que existe alguma subsequência de $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo para $x \in S_\alpha(p) \cap Q_\alpha(r_\alpha(p))$. $\|$

Afirmação 11. *S^*_α é hemicontínua inferior.*

Demonstração. Sejam $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ e $O \subseteq \mathbb{R}^n_+$ conjunto aberto para os quais existe algum $x \in S_\alpha(p) \cap Q_\alpha(r_\alpha(p)) \cap O$. Se $x = r_\alpha(p)$, então a continuidade de r_α garante que existe alguma vizinhança $\mathcal{N}_\delta(p)$ tal que para todos $q \in \mathcal{N}_\delta(p)$ temos $r_\alpha(q) \in O$ e, evidentemente, $r_\alpha(q) \in S_\alpha(q) \cap Q_\alpha(r_\alpha(q))$. Assuma agora que $x \neq r_\alpha(p)$.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $u_\alpha(x) > u_\alpha(r_\alpha(p)) + \varphi_\alpha(\|x - r_\alpha(p)\|)$. Com efeito, suponha que $u_\alpha(x) = u_\alpha(r_\alpha(p)) + \varphi_\alpha(\|x - r_\alpha(p)\|)$ e tome qualquer $\lambda \in (0,1)$. Pela convexidade de φ_α temos $\varphi_\alpha(\|\lambda x + (1-\lambda) r_\alpha(p) - r_\alpha(p)\|) = \varphi_\alpha(\lambda\|x - r_\alpha(p)\|) = \varphi_\alpha(\lambda\|x - r_\alpha(p)\| + (1-\lambda)0) \leq \lambda\varphi_\alpha(\|x - r_\alpha(p)\|) + (1-\lambda)\varphi_\alpha(0) = \lambda\varphi_\alpha(\|x - r_\alpha(p)\|)$. Pela concavidade estrita de u_α temos $u_\alpha(\lambda x + (1-\lambda) r_\alpha(p)) > \lambda u_\alpha(x) + (1-\lambda) u_\alpha(r_\alpha(p)) = \lambda u_\alpha(r_\alpha(p)) + \lambda\varphi_\alpha(\|x - r_\alpha(p)\|) + (1-\lambda) u_\alpha(r_\alpha(p)) = u_\alpha(r_\alpha(p)) + \lambda\varphi_\alpha(\|x - r_\alpha(p)\|) \geq u_\alpha(r_\alpha(p)) + \varphi_\alpha(\|\lambda x + (1-\lambda) r_\alpha(p) - r_\alpha(p)\|)$. Como O é aberto, podemos escolher λ suficientemente próximo de 1 de modo que $\lambda x + (1-\lambda) r_\alpha(p) \in O$. E como $S_\alpha(p)$ é convexo, concluímos que $\lambda x + (1-\lambda) r_\alpha(p) \in S_\alpha(p) \cap Q_\alpha(r_\alpha(p)) \cap O$, com $u_\alpha(\lambda x + (1-\lambda) r_\alpha(p)) > u_\alpha(r_\alpha(p)) + \varphi_\alpha(\|\lambda x + (1-\lambda) r_\alpha(p) - r_\alpha(p)\|)$.

Como S_α é hemicontínua inferior, segue que para cada aberto $O' \subseteq O$ para o qual $x \in O'$ existe alguma vizinhança $\mathcal{N}_\delta(p)$ tal que para todos $q \in \mathcal{N}_\delta(p)$ existe algum $y \in S_\alpha(q) \cap O'$. Afirmamos que existe algum aberto $O_0 \subseteq O$ com $x \in O_0$ e alguma vizinhança $\mathcal{N}_{\delta_0}(p)$ tal que para qualquer $q \in \mathcal{N}_{\delta_0}(p)$ existe $y \in S_\alpha(q) \cap O_0$ com $u_\alpha(y) \geq u_\alpha(r_\alpha(p)) + \varphi_\alpha(\|y - r_\alpha(p)\|)$. Com efeito, suponha que isto não seja verdade. Então, podemos contruir sequências decrescentes (de acordo com a ordem $\supset$) de bolas abertas $(\mathcal{B}_{\delta_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\mathcal{B}_{\varepsilon_k}(p))_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $\mathcal{B}_{\delta_k}(x) \subseteq O$ e existem $q_k \in \mathcal{B}_{\varepsilon_k}(p)$ e $y_k \in S_\alpha(q_k) \cap \mathcal{B}_{\delta_k}(x)$ com $u_\alpha(y_k) < u_\alpha(r_\alpha(q_k)) + \varphi_\alpha(\|y_k - r_\alpha(q_k)\|)$. Observe que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x e que $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para p. Pela continuidade de u_α, de r_α e de φ_α, decorre que $u_\alpha(x) \leq u_\alpha(r_\alpha(p)) + \varphi_\alpha(\|x - r_\alpha(p)\|)$, uma contradição. Portanto, existe alguma vizinhança $\mathcal{N}_\delta(p)$ tal que para todos $q \in \mathcal{N}_\delta(p)$ existe algum $y \in S_\alpha(q) \cap Q_\alpha(r_\alpha(p)) \cap O$. $\|$

Então, a correspondência S_α^* é de valor compacto e contínua, enquanto a função u_α é contínua. Pela quase-concavidade de u_α temos $|\arg\max u_\alpha (S_\alpha (p) \cap Q_\alpha (r_\alpha (p)))| = 1$, para todos $p \in \mathbb{R}^n_{++}$. Nestas condições, o Teorema do Máximo garante que a função $c_\alpha^* : \mathbb{R}^n_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$ definida por $c_\alpha^* (p) = \arg\max u_\alpha (S_\alpha (p) \cap Q_\alpha (r_\alpha (p)))$ $= \arg\max u_\alpha (S_\alpha^* (p))$ é uma função contínua.

Definimos a função excesso de demanda agregada $Z : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$ fazendo $Z(p) = \sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha^* (p) - \sum\limits_{\alpha \in A} \omega_\alpha$.

Como para todos $\alpha \in A$ a função c_α^* é contínua, então decorre que Z é contínua.

Sejam $\alpha \in A$, $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ e $\delta > 0$ arbitrários. Temos $S_\alpha (\delta p) = S_\alpha (p)$, o que implica que $T(\delta p) = \bigcup\limits_{\beta \in A} S_\beta (\delta p)$ $= \bigcup\limits_{\beta \in A} S_\beta (p) = T(p)$. Seguem que $a_\alpha (\delta p) = \arg\max u_\alpha (T(\delta p)) = \arg\max u_\alpha (T(p)) = a_\alpha (p)$, $r_\alpha (\delta p) =$ $\underset{x \in S_\alpha(\delta p)}{\arg\min} \|x - a_\alpha (\delta p)\| = \underset{x \in S_\alpha(p)}{\arg\min} \|x - a_\alpha (p)\| = r_\alpha (p)$ e $Q_\alpha (r_\alpha (\delta p)) = Q_\alpha (r_\alpha (\delta p))$. Então, $c_\alpha^* (\delta p) = c_\alpha^* (p)$. Logo, para todos $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ e $\delta > 0$ temos $Z(\delta p) = Z(p)$.

Afirmação 12. *(Lei de Walras com referência baseada em aspirações) Para cada* $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ *temos* $p \cdot Z(p) = 0$.

Demonstração. Sejam $\alpha \in A$ e $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ arbitrários. Vamos mostrar inicialmente que $p \cdot c_\alpha^* (p) = p \cdot \omega_\alpha$.

Considere o caso em que $a_\alpha (p) \in S_\alpha (p)$ e observe que neste caso temos $r_\alpha (p) = a_\alpha (p)$, $Q_\alpha (a_\alpha (p)) = \{a_\alpha (p)\}$ e $c_\alpha^* (p) = a_\alpha (p) = \arg\max u_\alpha (S_\alpha (p))$. Como u_α é fortemente crescente, então temos $p \cdot a_\alpha (p) = p \cdot \omega_\alpha$.

Agora, considere o caso em que $a_\alpha (p) \notin S_\alpha (p)$. Como $S_\alpha (p)$ é compacto, então segue que $r_\alpha (p) \in \partial S_\alpha (p)$ então $p \cdot r_\alpha (p) = p \cdot \omega_\alpha$. Suponha que $p \cdot c_\alpha^* (p) < p \cdot \omega_\alpha$. Em particular, $c_\alpha^* (p) \in int\,(S_\alpha (p))$. Existe alguma coordenada $i = 1, ..., n$ para a qual $c_\alpha^* (p)_i < r_\alpha (p)_i$. Considere qualquer vetor $x^* \in S_\alpha (p)$ tal que $c_\alpha^* (p)_i < x_i^* < r_\alpha (p)_i$ e $x_j^* = c_\alpha^* (p)_j$ para todos $j \neq i$. Temos que $\|x^* - r_\alpha (p)\| < \|x^* - r_\alpha (p)\|$. Como φ_α é estritamente crescente e u_α é fortemente crescente, então temos $u_\alpha (x^*) > u_\alpha (c_\alpha^* (p)) \geq u_\alpha (r_\alpha (p)) + \varphi_\alpha (\|c_\alpha^* (p) - r_\alpha (p)\|) > u_\alpha (r_\alpha (p)) + \varphi_\alpha (\|x^* - r_\alpha (p)\|)$ e $x^* \in S_\alpha (p) \cap Q_\alpha (a_\alpha (p))$. Isto contradiz o fato de que $c_\alpha^* (p) = \arg\max u_\alpha (S_\alpha (p) \cap Q_\alpha (r_\alpha (p)))$.

Para completarmos a demonstração da Afirmação, aplicamos o argumento ao final da demonstração do Teorema 5.2 na página 191 de Jehle e Reny (2001). $\|$

Seja $m = 1, ..., n$ qualquer. Definimos $Z_m : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$, a função excesso de demanda agregada para o bem m, fazendo $Z_m (p) = \sum\limits_{\alpha \in A} c_{\alpha,m}^* (p) - \sum\limits_{\alpha \in A} \omega_{\alpha,m}$, onde $c_{\alpha,m}^* (p)$ é a m^a coordenada de $c_\alpha^* (p)$ e $\omega_{\alpha,m}$ é a m^a coordenada de ω_α.

Afirmação 13. *Seja* $\left(p^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\mathbb{R}^n_{++}$ *convergindo para um vetor* $\overline{p} = (\overline{p}_1, ..., \overline{p}_n) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ *para o qual existe* $l = 1, ..., n$ *tal que* $\overline{p}_l = 0$. *Então, para* $m = 1, ..., n$ *tal que* $\overline{p}_m = 0$, *a sequência* $\left(Z_m \left(p^k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ *é ilimitada superiormente.*

Demonstração. Como $\overline{p} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ e $\omega_\alpha \in \mathbb{R}^n_{++}$, então $\sum\limits_{\alpha \in A} \overline{p} \cdot \omega_\alpha > 0$ e tomando o agente α_0 tal que $\overline{p} \cdot \omega_{\alpha_0}$ $\geq \overline{p} \cdot \omega_\alpha$ para todos $\alpha \in A$ concluímos que $\overline{p} \cdot \omega_{\alpha_0} > 0$. Além disso, $a_{\alpha_0} (\overline{p}) \in S_{\alpha_0} (\overline{p}) = T(\overline{p})$.

Considere a sequência $\left(c_{\alpha_0}^* \left(p^k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ e suponha que $\left(c_{\alpha_0}^* \left(p^k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente. Então, $\left(c_{\alpha_0}^* \left(p^k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada e existe alguma subsequência de $\left(c_{\alpha_0}^* \left(p^k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para algum $x^* \in \mathbb{R}^n_+$. Abusando da notação, representamos tal subsequência por $\left(c_{\alpha_0}^* \left(p^k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$. Como a subsequência $\left(p^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para $\overline{p}$ e $c_{\alpha_0}^*$ é contínua, então $x^* = c_{\alpha_0}^* (\overline{p}) = a_{\alpha_0} (\overline{p}) = \arg\max u_{\alpha_0} (T(\overline{p}))$.

Denote por e_l o l^o vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Considere o vetor $\widehat{x} = x^* + e_l$. Como u_α é fortemente crescente, então temos $u_\alpha(\widehat{x}) > u_\alpha(x^*)$. Como $\overline{p}_l = 0$, decorre que $\overline{p} \cdot \widehat{x} = \overline{p} \cdot x^* + \overline{p} \cdot e_l = \overline{p} \cdot x^* = \overline{p} \cdot \omega_{\alpha_0}$ > 0. Pela continuidade de u_α existe algum $\delta \in (0,1)$ suficientemente pequeno tal que $u_\alpha(\delta\widehat{x}) > u_\alpha(x^*)$ e $0 < \overline{p} \cdot \delta\widehat{x} < \overline{p} \cdot \omega_{\alpha_0}$. Mas isto implica que $x^* \neq \arg\max u_{\alpha_0}(T(\overline{p}))$, o que é uma contradição. Portanto, concluímos que $\left(c^*_{\alpha_0}\left(p^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente.

Para completarmos a demonstração da Afirmação, podemos utilizar os argumentos ao final da demonstração do Teorema 5.4 na página 196 de Jehle e Reny (2001). $\|$

Para completarmos a demonstração do Teorema 2, podemos aplicar o Teorema 5.3 de Jehle e Reny (2001) às Afirmações anteriores e ao fato de que Z é contínua em $\mathbb{R}^n_{++}$.

■

9 Equilíbrio de Nash com Referência Baseado em Aspiração

Na seção anterior aplicamos nosso modelo a uma situção na qual tanto a aspiração quanto a referência de cada agente não dependem das ações e escolhas dos outros agentes. Porém, pode ser que a aspiração, a referência e a escolha de um agente sejam afetadas pelas ações de outros agentes.

Nesta seção vamos considerar um jogo $\mathcal{G}$ do qual participa um conjunto finito de jogadores $\mathcal{I}$. A função payoff do jogador $i \in \mathcal{I}$ é denotada por u_i. Um jogador $i \in \mathcal{I}$ enfrenta seu problema de escolha (S_i, T_i) do seguinte modo. Inicialmente ele vislumbra a possibilidade de adotar no jogo alguma estratégia do conjunto potencial T_i. Porém, devido a alguma restrição que lhe é imposta, ele percebe que só pode adotar estratégias em um subconjunto restrito $S_i \subseteq T_i$. Nós consideramos que todos os jogadores estão enfrentado seus respectivos problemas de escolha de acordo com o mesmo procedimento e que o bem estar de cada um deles depende da combinação entre suas ações e as ações dos outros jogadores.

A princípio os jogadores consideram que o espaço de estratégias conjuntas no qual podem atuar é $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} T_i$. Porém, descobrem que o espaço de estratégias no qual podem efetivamente atuar é o espaço mais restrito $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} S_i$. Suponha que o resultado observado do jogo seja o perfil de estratégias $(s_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} S_i$. Cada um dos jogadores $i \in \mathcal{I}$ pode identificar que, dadas as estratégias que todos os outros jogadores assumem $(s_j)_{j\in\mathcal{I}\backslash\{i\}}$, sua melhor resposta seria $a_i \in T_i$, caso não lhe fosse imposta qualquer restrição em adotá-la. Porém, ele pode identificar qual estratégia efetiva $r_i \in S_i$ mais se assemelha à sua aspiração a_i. A referência r_i induz o agente a focar sua atenção a um conjunto de estratégias $Q_i(r_i)$. O perfil $((a_i, r_i, s_i))_{i\in\mathcal{I}}$ é um equilíbrio de Nash com referência baseado em aspirações se nenhum jogador i consegue vislumbrar qualquer incentivo que justifique abandonar s_i e adotar alguma outra estratégia $s_i^{'}$ em $S_i \cap Q_j(r_i)$.

Se T_i é o conjunto potencial de cada jogador $i \in \mathcal{I}$, então escrevemos $T := \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} T_i$. Como usual vamos escrever $T_{-i} := \prod\limits_{\substack{j\in\mathcal{I}\\ j\neq i}} T_j$, para representar um conjunto de todas as alternativas que todos os jogadores distintos de i podem adotar.

Definição 6. Para cada jogador $i \in \mathcal{I}$ considere seu problema de escolha (S_i, T_i) e alternativas $a_i \in T_i$ e $r_i, s_i \in S_i$. Dizemos que o perfil $((a_i, r_i, s_i))_{i\in\mathcal{I}}$ é equilíbrio de Nash com referência baseado em aspirações associado ao perfil de problemas $\{(S_i, T_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ no caso em que para cada $i \in \mathcal{I}$ ocorrem

$$a_i \in \arg\max_{x_i \in T_i} u_i(x_i, s_{-i})$$
$$r_i \in \arg\min_{x_i \in S_i} d_i(x_i, a_i)$$
$$s_i \in \arg\max_{S_i \cap Q_i(r_i)} u_i(x_i, s_{-i})$$

onde $d_i : T_i^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma métrica subjetiva de i e $Q_i : T_i \rightrightarrows T_i$ é uma correspondência que descreve como a referência r_i restringe a atenção de i ao conjunto $Q_i(r_i)$. Observe que o perfil de alternativas $(s_i)_{i\in\mathcal{I}}$ é um equilíbrio de Nash em sentido usual no espaço $\prod_{i\in\mathcal{I}} (S_i \cap Q_i(r_i))$.

Vamos ilustrar esta definição com um exemplo simples.

Exemplo 1. Considere o jogo do qual participam os jogadores 1 e 2 e cujos respectivos espaços de estratégias (puras) são $X_1 = \{A, B, C, D, E, F\}$ e $X_2 = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}\}$.

Vamos assumir que A, B, C, D, E, F, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ são pontos em dois segmentos de reta descritos pela figura a seguir

$$\overline{AFDCEB} \text{ e } \overline{\mathcal{CAFBDE}}$$

e tais que

$$\|A - F\| = 2$$
$$\|F - D\| = 3$$
$$\|D - C\| = 4$$
$$\|C - E\| = 1$$
$$\|E - B\| = 3$$

e

$$\|\mathcal{C} - \mathcal{A}\| = 1$$
$$\|\mathcal{A} - \mathcal{F}\| = 2$$
$$\|\mathcal{F} - \mathcal{B}\| = 3$$
$$\|\mathcal{B} - \mathcal{D}\| = 4$$
$$\|\mathcal{D} - \mathcal{E}\| = 5$$

Suponha que a matriz de payoffs do jogo é

		Jogador 2					
		$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{F}$
Jogador 1	A	$(-1; 0)$	$(2; 3)$	$(0; 5)$	$(0; 0)$	$(-2; -2)$	$(2; 4)$
	B	$(1; -2)$	$(-3; -1)$	$(5; -1)$	$(-1; 0)$	$(1; -1)$	$(2; 0)$
	C	$(1; 1)$	$(-2; -2)$	$(1; -1)$	$(0; 2)$	$(2; 1)$	$(0; 3)$
	D	$(-2; 3)$	$(1; 1)$	$(-1; 1)$	$(-1; 3)$	$(0; 2)$	$(2; 3)$
	E	$(2; -1)$	$(3; -2)$	$(0; 1)$	$(0, 0)$	$(2; 0)$	$(3; 5)$
	F	$(-1; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 3)$	$(2; -1)$	$(0; -2)$	$(-1; -2)$

e para cada jogador $i = 1, 2$ e cada estratégia $x_i \in T_i$ defina

$$Q_i(x_i) = \{y_i \in T_i : u_i(y_i, x_{-i}) \geq u_i(x_i, x_{-i}) \text{ para todos } x_{-i} \in T_{-i}\}$$

Sejam $T_1 = \{A, B, C, D, E\}$, $T_2 = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}\}$, $S_1 = T_1 \setminus \{A\}$ e $S_2 = T_2 \setminus \{\mathcal{C}\}$. Então, o perfil $((A, D, E), (\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{D}))$ é um equilíbrio de Nash (em estratégias puras) com referência baseada em aspiração dado os problemas no perfil $\{(S_i, T_i)\}_{i=1,2}$, ou seja,

$$\begin{aligned} A &\in \underset{x_1 \in T_1}{\arg\max}\, u_1(x_1, \mathcal{D}) \\ D &= \underset{x_1 \in S_1}{\arg\min}\, \|x_1 - A\| \\ E &\in \underset{S_1 \cap Q_1(D)}{\arg\max}\, u_1(x_1, \mathcal{D}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\in \underset{x_2 \in T_2}{\arg\max}\, u_2(E, x_2) \\ \mathcal{A} &= \underset{x_2 \in S_2}{\arg\min}\, \|x_2 - \mathcal{C}\| \\ \mathcal{D} &\in \underset{S_2 \cap Q_2(\mathcal{A})}{\arg\max}\, u_2(E, x_2) \end{aligned}$$

Agora vamos considerar $T_1 = \{C, D, E, F\}$, $T_2 = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$, $S_1 = \{D, F\}$ e $S_2 = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$. Como não existe nenhum equilíbrio de Nash (em estratégias puras) no espaço $S_1 \times S_2$, então não existe equilíbrio de Nash com referência baseado em aspiração (em estratégias puras) dados os problemas no perfil $\{(S_i, T_i)\}_{i=1,2}$.

Vamos mostrar que existe um perfil de problemas $\{(S_i, T_i)\}_{i=1,2}$ que contém equilíbrio de Nash em sentido usual, mas que não é equilíbrio de Nash com referência baseado em aspirações. Suponha que $T_1 = \{A, C, E\}$, $T_2 = \{\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{F}\}$, $S_1 = \{A, C\}$ e $S_2 = \{\mathcal{E}, \mathcal{F}\}$. Observe que $(A, \mathcal{F})$ é o único equilíbrio de Nash usual em $S_1 \times S_2$ e que $E = \underset{x_1 \in T_1}{\arg\max}\, u_1(x_1, \mathcal{F})$ e $\mathcal{C} = \underset{x_2 \in T_2}{\arg\max}\, u_1(A, x_2)$. Temos $C = \underset{x_1 \in S_1}{\arg\min}\, \|x_1 - E\|$ mas $u_i(A, \mathcal{C}) < u_i(C, \mathcal{C})$, de modo que $A \notin Q_2(C, E)$. Segue que não existe equilíbrio de Nash com Referência Baseado em Aspiração em $\{(S_i, T_i)\}_{i=1,2}$.

No teorema seguinte apresentamos condições que são suficientes para garantir a existência de um equilíbrio de Nash com referência baseado em aspirações.

Teorema 4. *Para cada jogador $i \in \mathcal{I}$ considere seu problema de escolha (S_i, T_i) e assuma que i é munido de uma função utilidade $u_i : X_i \longrightarrow \mathbb{R}$, de uma métrica $d_i : T_i^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e de uma correspondência $Q_i : T_i \rightrightarrows T_i$. Suponha que para cada i as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) T_i é espaço vetorial normado e S_i, T_i são espaços métricos compactos e convexos.

(b) u_i é contínua e para cada $x_{-i} \in T_{-i}$ a função $u_i(\cdot\,,\ x_{-i})$ é quase-côncava.

(c) Para cada $y_{-i} \in T_{-i}$ o conjunto $\underset{x_i \in S_i}{\arg\min}\, d_i(x_i, y_{-i})$ é convexo.

(d) A correspondência Q_i é de valor fechado, de valor convexo e hemicontínua superior e a correspondência $S_i^* : T_i \rightrightarrows T_i$ definida por $S_i^*(x_i) = S_i \cap Q_i(x_i)$ é hemicontínua inferior.

Nestas condições, existe um equilíbrio de Nash com referência baseado em aspirações.

Demonstração. Vamos escrever $\digamma = \prod_{i \in \mathcal{I}} (T_i \times S_i^2)$ e $\digamma_i = T_i \times S_i^2$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Tome $i \in \mathcal{I}$ qualquer.

Para cada $((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}} \in \digamma$ definimos

$$\begin{aligned} b_{i,asp}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right) &:= \underset{x_i\in T_i}{\arg\max}\ u_i\left(x_i, s_{-i}\right) \\ b_{i,ref}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right) &:= \underset{x_i\in S_i}{\arg\min}\ d_i\left(x_i, a_i\right) \\ b_{i,str}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right) &:= \underset{S_i\cap Q_i(r_i)}{\arg\max}\ u_i\left(x_i, s_{-i}\right) \end{aligned}$$

Deste modo, definimos as aplicações $b_{i,asp} : \digamma \longrightarrow T_i$ e $b_{i,ref}, b_{i,str} : \digamma \longrightarrow S_i$. O item (a) implica que $\digamma$ é compacto. O Teorema de Weierstrass e o item (b) implicam que $b_{i,asp}$ está bem definida. Para cada $a_i \in T_i$ a função $d_i\left(\cdot, a_i\right)$ é contínua em S_i, de modo que (a) e o Teorema de Weierstrass implicam que $b_{i,ref}$ está bem definida. Pelos itens (a) e (d) temos que $S_i \cap Q_i\left(r_i\right)$ é fechado e é subconjunto do compacto S_i, de modo que também é compacto. A compacidade de $S_i \cap Q_i\left(r_i\right)$ e a continuidade de u_i implicam que $b_{i,str}$ está bem definida.

Definimos a correspondência $b_i : \digamma \longrightarrow \digamma_i$ fazendo, para cada $((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}} \in \digamma$,

$$b_i\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right) := b_{i,asp}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right) \times b_{i,ref}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right) \times b_{i,str}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right).$$

A condição (a) implica que para cada $i \in \mathcal{I}$, $\digamma_i$ é um espaço métrico compacto e convexo. Segue que $\digamma$ é um espaço métrico compacto e convexo.

Definimos a correspondência $b : \digamma \rightrightarrows \digamma$ fazendo, para cada $((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}} \in \digamma$,

$$b\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right) = \prod_{i\in\mathcal{I}} b_i\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$$

Afirmação 14. *b é correspondência de valor convexo.*

Demonstração. Sejam $((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}} \in \digamma$; $\left(\left(a_j^{'}, r_j^{'}, s_j^{'}\right)\right)_{j\in\mathcal{I}}, \left(\left(a_j^{''}, r_j^{''}, s_j^{''}\right)\right)_{j\in\mathcal{I}} \in b\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$ e $\lambda \in (0,1)$ arbitrários. Fixemos $i \in \mathcal{I}$. Temos $\left(a_i^{'}, r_i^{'}, s_i^{'}\right), \left(a_i^{''}, r_i^{''}, s_i^{''}\right) \in b_i\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$; $a_i^{'}, a_i^{''} \in \underset{x_i\in T_i}{\arg\max}\ u_i\left(x_i, s_{-i}\right)$; $r_i^{'}, r_i^{''} \in \underset{x_i\in S_i}{\arg\min}\ d_i\left(x_i, a_i\right)$ e $s_i^{'}, s_i^{''} \in \underset{S_i\cap Q_i(r_i)}{\arg\min}\, u_i\left(x_i, s_{-i}\right).$

Como $u_i\left(a_i^{'}, s_{-i}\right) = u_i\left(a_i^{''}, s_{-i}\right)$ e $u_i\left(\cdot, s_{-i}\right)$ é quase-côncava, então $u_i\left(\lambda a_i^{'} + (1-\lambda)\, a_i^{''}, s_{-i}\right) \geq u_i\left(a_i^{'}, s_{-i}\right)$ e $\lambda a_i^{'} + (1-\lambda)\, a_i^{''} \in \underset{x_i\in T_i}{\arg\max}\ u_i\left(x_i, s_{-i}\right).$

De (c) segue que $\lambda r_i^{'} + (1-\lambda)\, r_i^{''} \in \underset{x_i\in S_i}{\arg\min}\ d_i\left(x_i, a_i\right).$

Pela convexidade de S_i e de $Q\left(r_i\right)$ temos $\lambda s_i^{'} + (1-\lambda)\, s_i^{''} \in S_i \cap Q\left(r_i\right)$. Como $u_i\left(s_i^{'}, s_{-i}\right) = u_i\left(s_i^{''}, s_{-i}\right)$ e $u_i\left(\cdot, s_{-i}\right)$ é quase-côncava, então $u_i\left(\lambda s_i^{'} + (1-\lambda)\, s_i^{''}, s_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i^{'}, s_{-i}\right)$ e $\lambda s_i^{'} + (1-\lambda)\, s_i^{''} \in \underset{S_i\cap Q(r_i)}{\arg\max}\ u_i\left(x_i, s_{-i}\right).$

Portanto, para cada $i \in \mathcal{I}$ temos $\lambda\left(a_i^{'}, r_i^{'}, s_i^{'}\right) + (1-\lambda)\left(a_i^{''}, r_i^{''}, s_i^{''}\right) \in b_i\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$ e assim $\lambda\left(\left(a_i^{'}, r_i^{'}, s_i^{'}\right)\right)_{i\in\mathcal{I}} + (1-\lambda)\left(\left(a_i^{''}, r_i^{''}, s_i^{''}\right)\right)_{i\in\mathcal{I}} \in b\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right).$ ‖

Precisamos mostrar a seguir que a correspondência b possui a propriedade de gráfico fechado. Sejam

$((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}, ((\alpha_j, \rho_j, \sigma_j))_{j\in\mathcal{I}} \in F$ e considere seqüências $\left(((a_j^n, r_j^n, s_j^n))_{j\in\mathcal{I}}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(((\alpha_j^n, \rho_j^n, \sigma_j^n))_{j\in\mathcal{I}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ em F tais que $((\alpha_j^n, \rho_j^n, \sigma_j^n))_{j\in\mathcal{I}} \in b\left(((a_j^n, r_j^n, s_j^n))_{j\in\mathcal{I}}\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} ((a_j^n, r_j^n, s_j^n))_{j\in\mathcal{I}} = ((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}$ e $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} ((\alpha_j^n, \rho_j^n, \sigma_j^n))_{j\in\mathcal{I}} = ((\alpha_j, \rho_j, \sigma_j))_{j\in\mathcal{I}}$. Queremos mostrar que $((\alpha_j, \rho_j, \sigma_j))_{j\in\mathcal{I}} \in b\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$.

Fixemos $i \in \mathcal{I}$ arbitrário. Em particular, temos $(\alpha_i^n, \rho_i^n, \sigma_i^n)_{i\in\mathcal{I}} \in b_i\left(((a_j^n, r_j^n, s_j^n))_{j\in\mathcal{I}}\right)$, $\alpha_i^n \in \arg\max\limits_{x_i\in T_i} u_i\left(x_i, s_{-i}^n\right)$, $\rho_i^n \in \arg\min\limits_{x_i\in S_i} d_i\left(x_i, a_i^n\right)$ e $\sigma_i^n \in \arg\max\limits_{S_i\cap Q\left(r_i^n\right)} u_i\left(x_i, s_{-i}^n\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (a_i^n, r_i^n, s_i^n) = (a_i, r_i, s_i)$ e $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (\alpha_i^n, \rho_i^n, \sigma_i^n) = (\alpha_i, \rho_i, \sigma_i)$.

Afirmação 15. $\alpha_i \in b_{i,asp}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$.

Demonstração. Vamos definir a correspondência $U_i : T_{-i} \rightrightarrows T_i$ fazendo $U_i\left(x_{-i}\right) = T_i$ para cada $x_{-i} \in T_{-i}$. Temos que T_{-i} e T_i são espaços métricos e U_i é correspondência de valor compacto e contínua. Definimos a correspondência $f_i : T_{-i} \rightrightarrows T_i$ fazendo $f_i\left(x_{-i}\right) = \arg\max\limits_{x_i\in T_i} u_i\left(x_i, x_{-i}\right)$ para cada $x_{-i} \in T_{-i}$. Como u_i é contínua em $T_i \times T_{-i}$ o Teorema do Máximo implica que f_i é fechada em s_{-i}. Como $\alpha_i^n \in f_i\left(s_{-i}^n\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} s_{-i}^n = s_{-i}$ e $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \alpha_i^n = \alpha_i$, segue que $\alpha_i \in f_i\left(s_{-i}\right) = \arg\max\limits_{x_i\in T_i} u_i\left(x_i, s_{-i}\right) = b_{i,asp}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$. ‖

Afirmação 16. $\rho_i \in b_{i,ref}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$

Demonstração. Vamos definir a correspondência $D_i : T_i \rightrightarrows T_i$ fazendo $D_i\left(t_i\right) = T_i$ para cada $t_i \in T_i$. D_i é correspondência de valor compacto e contínua. Definimos a correspondência $g_i : T_i \rightrightarrows T_i$ fazendo $g_i\left(t_i\right) = \arg\min\limits_{x_i\in T_i} d_i\left(x_i, t_i\right)$ para cada $t_i \in T_i$. Vamos definir a métrica $M_i : T_i^2 \times T_i^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ fazendo $M_i\left((x_i, y_i), \left(x_i', y_i'\right)\right) = \max\left\{d_i\left(x_i, x_i'\right), d\left(y_i, y_i'\right)\right\}$ para cada $(x_i, y_i), \left(x_i', y_i'\right) \in T_i^2$. Utilizando M_i podemos mostrar que d_i é contínua, bastando observar que para cada $\epsilon > 0$ e para cada $(x_i, y_i), \left(x_i', y_i'\right) \in T_i^2$ com $M_i\left((x_i, y_i), \left(x_i', y_i'\right)\right) < \frac{\epsilon}{2}$ temos $\left|d\left(x_i, y_i\right) - d\left(x_i', y_i'\right)\right| \le \left|d\left(x_i, y_i\right)\right| + \left|d\left(x_i', y_i'\right)\right| < \epsilon$. Pelo Teorema do Máximo sabemos que g_i é fechada em a_i. Como $\rho_i^n \in g_i\left(a_i^n\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_i^n = a_i$ e $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \rho_i^n = \rho_i$, segue que $\rho_i \in g_i\left(a_i\right) = \arg\min\limits_{x_i\in S_i} d_i\left(x_i, a_i\right) = b_{i,ref}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$. ‖

Como Q_i é hemicontínua superior e $\sigma_i^n \in Q_i\left(r_i^n\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então tomando uma subseqüência de $\left(\sigma_i^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto de $Q_i\left(r_i\right)$, concluímos que $\sigma_i \in Q\left(r_i\right)$. Logo, $\sigma_i \in S_i \cap Q_i\left(r_i\right)$.

Afirmação 17. $\sigma_i \in b_{i,str}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$.

Demonstração. Suponha existir $\sigma_i' \in S_i \cap Q_i\left(r_i\right)$ tal que $u_i\left(\sigma_i', s_{-i}\right) > u_i\left(\sigma_i, s_{-i}\right)$. Como pela hipótese (d) a correspondência $S_i \cap Q_i\left(\cdot\right)$ é hemicontínua inferior, então existe $\left(z_i^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_i^n \in S_i \cap Q_i\left(r_i^n\right)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\rightarrow+\infty} z_i^n = \sigma_i'$. Como $\left(z_i^n, s_{-i}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\left(\sigma_i', s_{-i}\right)$ e $\left(\sigma_i^n, s_{-i}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\left(\sigma_i, s_{-i}\right)$, então pela continuidade de u_i existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n \in \mathbb{N}$ com $n \ge n_0$ temos $u_i\left(z_i^n, s_{-i}^n\right) > u_i\left(\sigma_i^n, s_{-i}^n\right)$ e $\sigma_i^n \notin \arg\max\limits_{S_i\cap Q_i\left(r_i^n\right)} u_i\left(x_i, s_{-i}^n\right)$, uma contradição. Logo, $\sigma_i \in \arg\max\limits_{S_i\cap Q_i\left(r_i\right)} u_i\left(x_i, s_{-i}\right) = b_{i,str}\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$. ‖

Portanto, $(\alpha_i, \rho_i, \sigma_i) \in b_i\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$. Como i é arbitrário, então concluímos que $\left((\alpha_j, \rho_j, \sigma_j)\right)_{j\in\mathcal{I}}$ $\in b\left(((a_j, r_j, s_j))_{j\in\mathcal{I}}\right)$. Segue que b é correspondência de gráfico fechado.

Aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Glicksberg-Fan à correspondência b, obtemos $((\alpha_i, \rho_i, \sigma_i))_{i\in\mathcal{I}} \in \digamma$ tal que $((\alpha_i, \rho_i, \sigma_i))_{i\in\mathcal{I}} \in b\left(((\alpha_i, \rho_i, \sigma_i))_{i\in\mathcal{I}}\right)$. Este ponto é o equilíbrio de Nash com referência baseado em aspirações.

■

Uma das premissas importantes do Teorema 2 é a de que a correspondência $S_i \cap Q_i(\cdot)$ de cada jogador $i \in \mathcal{I}$ é contínua. Vamos apresentar explicitamente um caso em que todas as premissas do Teorema 2 são satisfeitas. Considere um jogo finito $\mathcal{G}$ com 2 jogadores tal que o espaço de estratégias puras de cada jogador $i = 1, 2$ é um conjunto com dois elementos denotado por $A_i = \{\alpha_i, \beta_i\}$.

Dado o jogador i sejam T_i o espaço de todas as estratégias mistas de i; $u_i : T_i \times T_{-i} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função utilidade esperada von Neumann-Morgenstern de i e d_i a distância Euclidiana. Deste modo todas as hipóteses (a), (b) e (c) estão satisfeitas. Em particular, para todos os jogadores $i \in \mathcal{I}$ assumimos o espaço vetorial Euclidiano $(T_i, \|\|)$ e para cada $y_i \in T_i$, $\underset{x_i\in S_i}{\arg\min}\, \|x_i - y_i\|$ é um conjunto unitário.

Fixe $i \in \mathcal{I}$ arbitrário e assuma que para cada par de estratégias mistas $x_i, y_i \in T_i$ existe alguma estratégia mista $z_{-i} \in T_{-i}$ tal que $u_i(x_i, z_{-i}) \neq u_i(y_i, z_{-i})$. Para cada $x_i \in T_i$ defina

$$Q_i(x_i) = \{y_i \in T_i : u_i(y_i, x_{-i}) \geq u_i(x_i, x_{-i}) \text{ para todos } x_{-i} \in T_{-i}\} \qquad (**)$$

Proposição 7. *Q_i é de valor convexo, de valor compacto e hemicontínua superior e $S_i \cap Q_i(\cdot)$ é hemicontínua inferior.*

Demonstração. (a) Q_i é de valor convexo e de valor compacto: Fixe $x_i \in T_i$ qualquer. Sejam $y_i, y_i^{'} \in Q_i(x_i)$ e $\lambda \in [0, 1]$ arbitrários. Temos $u_i\left(\lambda y_i + (1-\lambda) y_i^{'}, x_{-i}\right) = \lambda u_i(y_i, x_{-i}) + (1-\lambda) u_i\left(y_i^{'}, x_{-i}\right) \geq \lambda u_i(x_i, x_{-i})$ $+ (1-\lambda) u_i(x_i, x_{-i}) = u_i(x_i, x_{-i})$ para todos $x_{-i} \in T_{-i}$, de modo que $\lambda y_i + (1-\lambda) y_i^{'} \in Q_i(x_i)$. Como $Q_i(x_i)$ é subcontjunto do Simplex de $\mathbb{R}^2_+$ que por sua vez é um conjunto limitado, então $Q_i(x_i)$ é também limitado. Sejam $y_i \in T_i$ e $(y_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $Q_i(x_i)$ tal que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} y_i^n = y_i$. Pela continuidade de u_i em $T_i \times T_{-i}$ temos $u_i(y_i, x_{-i}) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_i(y_i^n, x_{-i}) \geq u_i(x_i, x_{-i})$ para todos $x_{-i} \in T_{-i}$, de modo que $y_i \in Q_i(x_i)$. Segue que $Q_i(x_i)$ é fechado e portanto, compacto.

(b) Q_i é hemicontínua superior: Sejam $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em T_i e $x_i \in T_i$ tais que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_i^n = x_i$ e $y_i^n \in Q_i(x_i^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como T_i é compacto, então existem $(y_i^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subseqüência de $(y_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y_i \in X_i$ tais que $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} y_i^{n_k} = y_i$. Fixe $x_{-i} \in T_{-i}$ arbitrário. Pela continuidade de u_i temos $u_i(y_i, x_{-i}) =$ $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} u_i(y_i^{n_k}, x_{-i}) \geq \lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} u_i(x_i^{n_k}, x_{-i}) = u_i(x_i, x_{-i})$. Segue que $y_i \in Q_i(x_i)$.

(c) $S_i \cap Q_i(\cdot)$ é hemicontínua inferior: Sejam $x_i \in T_i$ e $O \subseteq T_i$ um aberto tais que $S_i \cap Q_i(x_i) \cap O \neq \varnothing$. Se $x_i \in S_i \cap Q_i(x_i) \cap O$, então basta tomar qualquer vizinhança $\mathcal{N}_\delta(x_i) \subseteq O$ tal que $\mathcal{N}_\delta(x_i) \cap S_i \neq \varnothing$ (o que pode ser feito porque existe alguma sequência de elementos de S_i convergindo para x_i), de modo que para todos $y_i \in \mathcal{N}_\delta(x_i) \cap S_i$ temos $y_i \in S_i \cap Q_i(y_i) \cap O$. Considere o caso em que $x_i \notin S_i \cap Q_i(x_i) \cap O$ e seja $y_i \in S_i \cap Q_i(x_i) \cap O$. Para qualquer $x_{-i} \in T_{-i}$ temos $u_i(y_i, x_{-i}) \geq u_i(x_i, x_{-i})$, de modo que $u_i(y_i, \alpha_{-i}) > u_i(x_i, \alpha_{-i})$ ou $u_i\left(y_i, \beta_{-i}\right) > u_i\left(x_i, \beta_{-i}\right)$. Com efeito, se ocorressem $u_i(y_i, \alpha_{-i}) =$ $u_i(x_i, \alpha_{-i})$ e $u_i\left(y_i, \beta_{-i}\right) = u_i\left(x_i, \beta_{-i}\right)$, então para qualquer $\lambda \in (0, 1)$ teríamos $u_i\left(y_i, \lambda\alpha_{-i} + (1-\lambda)\beta_{-i}\right)$

$= u_i\left(x_i, \lambda\alpha_{-i} + (1-\lambda)\beta_{-i}\right).$

Assuma que $u_i(y_i, \alpha_{-i}) > u_i(x_i, \alpha_{-i})$ e que $u_i\left(y_i, \beta_{-i}\right) \geq u_i\left(x_i, \beta_{-i}\right)$. Como $u_i\left(\cdot, \beta_{-i}\right)$ é contínua no conjunto compacto S_i, então existe $z_i^* \in \underset{z_i \in S_i}{\arg\max} u_i\left(z_i, \beta_{-i}\right)$. Pela continuidade de u_i existe algum $\lambda \in (0,1)$ arbitrariamente próximo de 1 tal que $\lambda y_i + (1-\lambda) z_i^* \in O$ e $u_i(\lambda y_i + (1-\lambda) z_i^*, \alpha_{-i}) > u_i(x_i, \alpha_{-i})$. Temos $u_i\left(\lambda y_i + (1-\lambda) z_i^*, \beta_{-i}\right) = \lambda u_i\left(y_i, \beta_{-i}\right) + (1-\lambda) u_i\left(z_i^*, \beta_{-i}\right) \geq u_i\left(x_i, \beta_{-i}\right)$. Denote $w_i = \lambda y_i + (1-\lambda) z_i^*$ e observe que $w_i \in S_i$, devido à convexidade de S_i. Além disso, acabamos de mostrar que $u_i(w_i, \alpha_{-i}) > u_i(x_i, \alpha_{-i})$ e $u_i\left(w_i, \beta_{-i}\right) \geq u_i\left(x_i, \beta_{-i}\right)$.

Há duas possibilidades que devemos considerar. Suponha que $x_i \in \underset{z_i \in S_i}{\arg\max} u_i\left(z_i, \beta_{-i}\right)$. Neste caso, $u_i\left(w_i, \beta_{-i}\right) = u_i\left(x_i, \beta_{-i}\right)$ e devido à continuidade de u_i existe uma vizinhança $\mathcal{N}_\delta(x_i)$ tal que para todos $x_i' \in \mathcal{N}_\delta(x_i)$ temos $u_i(w_i, \alpha_{-i}) > u_i\left(x_i', \alpha_{-i}\right)$ e $u_i\left(w_i, \beta_{-i}\right) = u_i\left(x_i, \beta_{-i}\right) \geq u_i\left(x_i', \beta_{-i}\right)$. Suponha que $x_i \notin \underset{z_i \in S_i}{\arg\max} u_i\left(z_i, \beta_{-i}\right)$. Neste caso, $u_i\left(w_i, \beta_{-i}\right) > u_i\left(x_i, \beta_{-i}\right)$ e devido à continuidade de u_i existe uma vizinhança $\mathcal{N}_\delta(x_i)$ tal que para todos $x_i' \in \mathcal{N}_\delta(x_i)$ temos $u_i(w_i, \alpha_{-i}) > u_i\left(x_i', \alpha_{-i}\right)$ e $u_i\left(w_i, \beta_{-i}\right) > u_i\left(x_i', \beta_{-i}\right)$. Em ambas as possibilidades, para quaisquer$x_i' \in \mathcal{N}_\delta(x_i)$ e $x_{-i} \in T_{-i}$ temos $u_i(w_i, x_{-i}) \geq u_i\left(x_i', x_{-i}\right)$, de modo que $w_i \in S_i \cap Q_i\left(x_i'\right) \cap O$. $\|$

Exemplo 2. Vamos considerar o jogo Batalha dos Sexos (apresentado em Fudenberg & Tirole (1991)).

$$\begin{pmatrix} (0;0) & (2;1) \\ (1;2) & (0;0) \end{pmatrix}$$

Sejam

$$S_i = \left\{(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha_i + \beta_i = 1 \text{ e } \gamma_i \leq \alpha_i \leq \delta_i\right\}$$

e

$$T_i = \left\{(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha_i + \beta_i = 1 \text{ e } \gamma_i' \leq \alpha_i \leq \delta_i'\right\}$$

onde $0 < \gamma_i' \leq \gamma_i \leq \delta_i \leq \delta_i' < 1$, para todos $i = 1, 2$. Temos $u_1((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)) = \beta_1\alpha_2 + 2\alpha_1\beta_2 = \alpha_1(2 - 3\alpha_2) + \alpha_2$ e $u_2((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)) = 2\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2(2 - 3\alpha_1)$. Assuma Q_i definida por $(**)$ para ambos jogadores $i = 1, 2$. É óbvio que

$$\begin{aligned}
(\delta_1, 1-\delta_1) &= \underset{(\alpha_1,\beta_1)\in S_1}{\arg\min} \left\|(\alpha_1, \beta_1) - \left(\delta_1', 1-\delta_1'\right)\right\| \\
(\gamma_1, 1-\gamma_1) &= \underset{(\alpha_1,\beta_1)\in S_1}{\arg\min} \left\|(\alpha_1, \beta_1) - \left(\gamma_1', 1-\gamma_1'\right)\right\| \\
(\delta_2, 1-\delta_2) &= \underset{(\alpha_2,\beta_2)\in S_2}{\arg\min} \left\|(\alpha_2, \beta_2) - \left(\delta_2', 1-\delta_2'\right)\right\| \\
(\gamma_2, 1-\gamma_2) &= \underset{(\alpha_2,\beta_2)\in S_2}{\arg\min} \left\|(\alpha_2, \beta_2) - \left(\gamma_2', 1-\gamma_2'\right)\right\|
\end{aligned}$$

(a) Consideremos o caso em que $\delta_1, \delta_2 < \frac{2}{3}$: Temos

$$\begin{aligned}
u_i((\delta_i, 1-\delta_i), (\delta_{-i}, 1-\delta_{-i})) &= \max_{(\alpha_i,\beta_i)\in S_i} u_i((\alpha_i, \beta_i), (\delta_{-i}, 1-\delta_{-i})) \\
u_i\left(\left(\delta_i', 1-\delta_i'\right), (\delta_{-i}, 1-\delta_{-i})\right) &= \max_{(\alpha_i,\beta_i)\in T_i} u_i((\alpha_i, \beta_i), (\delta_{-i}, 1-\delta_{-i}))
\end{aligned}$$

para todos $i = 1, 2.$

(b) Consideremos o caso em que $\frac{2}{3} < \gamma_2$ e $\delta_1 < \frac{2}{3}$: Temos

$$\begin{aligned}
u_1\left(\left(\gamma_1, 1-\gamma_1\right), \left(\delta_2, 1-\delta_2\right)\right) &= \max_{\left(\alpha_1, \beta_1\right) \in S_1} u_i\left(\left(\alpha_1, \beta_1\right), \left(\delta_2, 1-\delta_2\right)\right) \\
u_1\left(\left(\gamma_1^{'}, 1-\gamma_1^{'}\right), \left(\delta_2, 1-\delta_2\right)\right) &= \max_{\left(\alpha_1, \beta_1\right) \in T_1} u_i\left(\left(\alpha_1, \beta_1\right), \left(\delta_2, 1-\delta_2\right)\right) \\
u_2\left(\left(\gamma_1, 1-\gamma_1\right), \left(\delta_2, 1-\delta_2\right)\right) &= \max_{\left(\alpha_2, \beta_2\right) \in S_2} u_i\left(\left(\gamma_1, 1-\gamma_1\right), \left(\alpha_2, \beta_2\right)\right) \\
u_2\left(\left(\gamma_1, 1-\gamma_1\right), \left(\delta_2^{'}, 1-\delta_2^{'}\right)\right) &= \max_{\left(\alpha_2, \beta_2\right) \in T_2} u_i\left(\left(\gamma_1, 1-\gamma_1\right), \left(\alpha_2, \beta_2\right)\right)
\end{aligned}$$

(c) Consideremos o caso em que $\gamma_i \leq \frac{2}{3} \leq \delta_i$ para ambos $i = 1, 2$: Os equilíbrios de Nash em $S_1 \times S_2$ são os perfis $\left(\left(\delta_1, 1-\delta_1\right), \left(\gamma_2, 1-\gamma_2\right)\right)$, $\left(\left(\gamma_1, 1-\gamma_1\right), \left(\delta_2, 1-\delta_2\right)\right)$ e $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\left(\delta_1, 1-\delta_1\right) &= \arg\max_{\left(\alpha_1, \beta_1\right) \in T_1} u_1\left(\left(\alpha_1, \beta_1\right), \left(\gamma_2, 1-\gamma_2\right)\right) \\
\left(\gamma_2, 1-\gamma_2\right) &= \arg\max_{\left(\alpha_2, \beta_2\right) \in T_2} u_2\left(\left(\delta_1, 1-\delta_1\right), \left(\alpha_2, \beta_2\right)\right) \\
\left(\gamma_1, 1-\gamma_1\right) &= \arg\max_{\left(\alpha_1, \beta_1\right) \in T_1} u_1\left(\left(\alpha_1, \beta_1\right), \left(\delta_2, 1-\delta_2\right)\right) \\
\left(\delta_2, 1-\delta_2\right) &= \arg\max_{\left(\alpha_2, \beta_2\right) \in T_2} u_2\left(\left(\gamma_1, 1-\gamma_1\right), \left(\alpha_2, \beta_2\right)\right) \\
\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) &= \arg\max_{\left(\alpha_i, \beta_i\right) \in T_i} u_i\left(\left(\alpha_i, \beta_i\right), \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right) \\
\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) &= \arg\min_{\left(\alpha_i, \beta_i\right) \in S_i} \left\|\left(\alpha_i, \beta_i\right) - \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right\|
\end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2.$

(d) Considere o caso em que $\gamma_1 \leq \frac{2}{3} \leq \delta_1$ e $\frac{2}{3} < \gamma_2$: O equilíbrio de Nash em $S_1 \times S_2$ é $\left(\left(\gamma_1, 1-\gamma_1\right), \left(\delta_2, 1-\delta_2\right)\right)$, com

$$\begin{aligned}
\left(\gamma_1, 1-\gamma_1\right) &= \arg\max_{\left(\alpha_1, \beta_1\right) \in T_1} u_1\left(\left(\alpha_1, \beta_1\right), \left(\delta_2, 1-\delta_2\right)\right) \\
\left(\delta_2, 1-\delta_2\right) &= \arg\max_{\left(\alpha_2, \beta_2\right) \in T_2} u_2\left(\left(\gamma_1, 1-\gamma_1\right), \left(\alpha_2, \beta_2\right)\right)
\end{aligned}$$

(e) Considere o caso em que $\gamma_1 \leq \frac{2}{3} \leq \delta_1$ e $\delta_2 < \frac{2}{3}$: O equilíbrio de Nash em $S_1 \times S_2$ é $\left(\left(\delta_1, 1-\delta_1\right), \left(\gamma_2, 1-\gamma_2\right)\right)$, com

$$\begin{aligned}
\left(\delta_1, 1-\delta_1\right) &= \arg\max_{\left(\alpha_1, \beta_1\right) \in T_1} u_1\left(\left(\alpha_1, \beta_1\right), \left(\gamma_2, 1-\gamma_2\right)\right) \\
\left(\gamma_2, 1-\gamma_2\right) &= \arg\max_{\left(\alpha_2, \beta_2\right) \in T_2} u_2\left(\left(\delta_1, 1-\delta_1\right), \left(\alpha_2, \beta_2\right)\right)
\end{aligned}$$

Neste jogo, em todos os casos (a)-(e), a referência de cada agente coincide com sua estratégia no equilíbrio de Nash em $S_1 \times S_2$.

10 Considerações Finais

Neste artigo apresentamos algumas aplicações de nosso modelo de preferência revelada com referência baseada em aspirações a alguns tópicos tradicionais da teoria econômica. Isso mostra que o modelo é capaz de ampliar o escopo de análise desses tópicos e sugere que pode ser aplicado a outros temas da análise econômica.

Na primeira aplicação, a aspiração e a referência de cada agente é independente das ações dos outros agentes, do mesmo modo que na análise econômica de ambientes de competição perfeita. Na segunda aplicação, ao contrário, a aspiração e referência de cada agente depende das decisões dos outros agentes. Nos dois casos, com as adaptações adequadas em relação à abordagem usual, mostramos a existência de equilíbrio do modelo.

Parte IV

NOTA A RESPEITO DE "EQUIVALENT COMPARISONS OF INFORMATION CHANNELS"

11 Introdução

Nakata (2011) apresenta um modelo de aquisição de informações no qual o agente não sabe que peças de informação estão sendo perdidas no processo. Seus resultados estão fortemente baseados nos resultados de Dekel et al (2001) — daqui por diante denotado por DLR. Nesta nota apresentamos alguns problemas nos resultados propostos por Nakata e mostramos como podemos corrigi-los.

Na próxima seção apresentamos o arcabouço formal e introduzimos os principais conceitos relacionados à representação com a qual trabalharemos a seguir. Na seção 13 discutimos os problemas no Teorema 1 de Nakata. Inicialmente observamos que apesar da definição de representação EU fraca proposta por Nakata exigir que todos os conjuntos de nós de informação neste tipo de representação sejam finitos, nenhum dos axiomas apresentados por ele são capazes de garantir que isto ocorra. Este é um problema menor o qual podemos corrigir simplesmente ao ignorar o requerimento de trabalhar com conjuntos de nós de informação finitos. Porém, há um outro problema associado ao Teorema 1 de Nakata: o axioma de continuidade utilizado por Nakata não é forte o bastante para implicar na representação pretendida. De fato, nós apresentamos um exemplo que ilustra o fato de que os axiomas de Nakata não são suficientes sequer para garantir que a relação de preferência sobre canais de informação seja representável por uma função de utilidade. Posteriormente mostramos como fortalecer o axioma de continuidade de Nakata de modo a obter a representação desejada.

Na seção 14 argumentamos que o Teorema 2 de Nakata também sofre dos mesmos problemas do seu primeiro teorema. Este problema pode ser corrigido da mesma maneira que fizemos em relação ao primeiro resultado, mas no caso do segundo resultado podemos fazer ainda mais. Mostramos que quando estamos tratando de representações EU ordinais, que é o caso do segundo teorema, nós podemos impor um axioma adicional que garante que todos os conjuntos de nós de informação são finitos.

Finalmente, na seção 15 nós discutimos o Teorema 3 de Nakata, que trata de representações EU finitas monótonas aditivas. Novamente, seu resultado sofre dos mesmos problemas apontados acima. Contudo, neste caso, não basta fortalecermos o axioma de continuidade. Nós mostramos através de um exemplo que mesmo se fortalecermos o axioma de continuidade de Nakata do mesmo modo como fizemos nos casos anteriores, ainda assim não podemos obter a representação desejada. Por isso apresentamos um postulado adicional e mostramos como sua combinação com os outros axiomas implica na versão correta do Teorema 3 de Nakata.

12 Arcabouço e Representações

Vamos denotar por $\mathcal{J}$ o conjunto finito de canais de informações. Sejam C o conjunto finito de 'resultados' ou 'prêmios' e $\Delta(C)$ o conjunto de todas as distribuições de probabilidades (loterias) sobre C. Denote por $\mathcal{B}(\Delta(C))$ a classe de todos os subconjuntos fechados e não vazios de $\Delta(C)$, o qual dotamos com a métrica de Hausdorff[2].

Referimo-nos aos elementos de $\mathcal{B}(\Delta(C))$ como menus e notamos que o espaço de menus é compacto. O agente possui uma relação de preferência (uma relação binária transitiva e completa) $\succsim$ sobre $\mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$. Como usual, denotamos a parte simétrica de $\succsim$ por $\sim$ e a parte assimétrica por $\succ$. Consideraremos a seguinte definição:

Definição 7. Uma *representação EU fraca* é uma lista ordenada $(\{\mathcal{M}_j, \varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}, U)$ que satisfaz:

i Para cada $j \in \mathcal{J}$, $\mathcal{M}_j$ é um conjunto qualquer;

ii $U : \Delta(C) \times \cup_{j\in\mathcal{J}}\mathcal{M}_j \to \mathbb{R}$ é uma função tal que, para cada $j \in \mathcal{J}$ e cada $m_j \in \mathcal{M}_j$, $U(., m_j)$ é uma função utilidade esperada, isto é, existe uma função $u : C \to \mathbb{R}$ tal que, para todos $p \in \Delta(C)$, $U(p, m_j)$ $= \sum_{x\in C} p(x)u(x)$.

iii As funções $\varphi_j : \mathbb{R}^{\mathcal{M}_j} \to \mathbb{R}$ são tais que a função $v : \mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C)) \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(j, B) := \varphi_j\left(\left\langle \max_{p\in B} U(p, m_j)\right\rangle_{m_j\in\mathcal{M}_j}\right),$$

para todos $j \in \mathcal{J}$ e todo $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$, é contínua.

Se todos os conjuntos em $\{\mathcal{M}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ são finitos , dizemos que $(\{\mathcal{M}_j, \varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}, U)$ é uma *representação EU fraca finita.*

Nakata estabeleceu duas condições adicionais na definição de representação EU fraca, mas elas referem-se apenas à inexistência de elementos irrelevantes e redundantes nos conjuntos em $\{\mathcal{M}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ e iremos ignorá-las aqui.[3]

Dizemos que a representação EU fraca $(\{\mathcal{M}_j, \varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}, U)$ representa a relação de preferência $\succsim$ sobre $\mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ se a função v definida no item (iii) da Definição 7 satisfaz

Para todos $i, j \in \mathcal{J}$ e $A, B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ temos $(i, A) \succsim (j, B)$ se, e somente se, $v(i, A) \geq v(j, B)$.

[2] Nakata (2011) segue DLR e define $\mathcal{B}(\Delta(C))$ como a classe de todos os subconjuntos de $\Delta(C)$. Nós restringimo-nos a subconjuntos fechados de $\Delta(C)$ para simplificar a exposição.

[3] Dado $j \in \mathcal{J}$, dizemos que $m_j \in \mathcal{M}_j$ é relevante se para qualquer vizinhança $\mathcal{N}_\delta(m_j)$ existem $A, B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ com $A \nsim B$ e tais que para todos $m_j' \in \mathcal{M}_j \backslash \mathcal{N}_\delta(m_j)$ temos $\max_{p\in A} u\left(p, m_j'\right) = \max_{p\in A} u\left(p, m_j'\right)$.

Precisaremos também das seguintes definições:

Definição 8. Uma *representação EU ordinal* é uma representação EU fraca $(\{\mathcal{M}_j, \varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}, U)$ onde os agregadores $\{\varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ são todos estritamente crescentes em seus domínios relevantes, ou seja, são estritamente crescentes em $\{\langle \max_{p\in A} U(p, m_j)\rangle_{m_j\in\mathcal{M}_j} : A \in \mathcal{B}(\Delta(C))\}$. Novamente, se todos os conjuntos em $\{\mathcal{M}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ são finitos, nós dizemos que $(\{\mathcal{M}_j, \varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}, U)$ é uma *representação EU ordinal finita.*

Definição 9. Uma *representação EU aditiva monótona finita* é uma terna $(\{\mathcal{M}_j, \langle\mu_{m_j}\rangle_{m_j\in\mathcal{M}_j}\}_{j\in\mathcal{J}}, U)$ tais que

i Para cada $j \in \mathcal{J}$, $\mathcal{M}_j$ é um conjunto finito;

ii Para cada $j \in \mathcal{J}$, $\langle\mu_{m_j}\rangle_{m_j\in\mathcal{M}_j} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_j}_{++}$.

Dizemos que $(\{\mathcal{M}_j, \langle\mu_{m_j}\rangle_{m_j\in\mathcal{M}_j}\}_{j\in\mathcal{J}}, U)$ representa $\succsim$ se ao definimos $\{\varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ por $\varphi_j(\xi) := \sum_{m_j\in\mathcal{M}_j} \mu_{m_j}\xi(m_j)$ para todos $j \in \mathcal{J}$ e todos $\xi \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_j}$, então $(\{\mathcal{M}_j, \varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}, U)$ é uma representação ordinal finita de $\succsim$.

13 Caracterização da EU fraca Representações

O Teorema 1 em Nakata (2011) afirma que qualquer representação EU fraca é caracterizada pelos seguintes postulados:

Axioma 7 (Continuidade)**.** *Dados $j \in \mathcal{J}$ and $A \in \mathcal{B}(\Delta(C))$, os conjuntos $\{(j, B) : B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ e $(j, A) \succ (j, B)\}$ e $\{(j, B) : B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ e $(j, B) \succ (j, A)\}$ são abertos.*

Axioma 8 (Não trivialidade)**.** *Dado qualquer $j \in \mathcal{J}$, existem A ae B em $\mathcal{B}(\Delta(C))$ tais que $(j, A) \succ (j, B)$.*

Axioma 9 (Indiferença à Randomização)**.** *Para todos $j \in \mathcal{J}$ e $A \in \mathcal{B}(\Delta(C))$, $(j, A) \sim (j, conv(A))$, onde $conv(A)$ denota a envoltória convexa de A.*

A primeira coisa a ser notada no sistema axiomático acima é que nenhum dos axiomas está relacionado com o fato de que todos os conjuntos em $\{\mathcal{M}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ são finitos. De fato, se $\mathcal{J}$ é um conjunto unitário, o arcabouço de Nakata reduz-se ao arcabouço do DLR e é sabido que neste caso pode ser necessário um número infinito de estados para encontrar-se uma representação EU fraca de uma relação que satisfaça os axiomas acima. Este é um problema menor e no restante da seção admitiremos que os conjuntos $\{\mathcal{M}_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ possam ter um número infinito de elementos. Deste modo, trabalharemos com representações EU que não necessariamente sejam finitas.

O outro problema com o Teorema 1 de Nakata é que o Axioma de Continuidade acima é insuficientemente forte para garantir que $\succsim$ admita uma representação EU fraca. De fato, como mostra o exemplo a seguir, não é forte o bastante para garantir sequer que $\succsim$ admita uma representação por função utilidade.

Exemplo 3. Sejam $\mathcal{J} := \{j, j'\}$, $C := \{x, y\}$ e $u : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x) := 1$, $u(y) := 0$. Defina uma relação de preferência $\succsim$ sobre $\mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ fazendo

$$(k, A) \succ (l, B) \text{ se, e somente se, } \max_{p\in A} E_p(u) > \max_{p\in B} E_p(u) \text{ ou } \begin{cases} \max\limits_{p\in A} E_p(u) = \max\limits_{p\in B} E_p(u) \\ \text{e} \\ k = j \text{ e } l = j' \end{cases} \quad (1)$$

Pode ser facilmente verificado que $\succsim$ satisfaz todos os axiomas acima. Porém, podemos mostrar que $\succsim$ não admite representação por uma função utilidade. Com efeito, suponha que existe uma function $W : \mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C)) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $(k, A), (l, B) \in \mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ temos

$$W(k, A) \geq W(l, B) \Longleftrightarrow (k, A) \succsim (l, B).$$

Isto implica que para cada $\lambda \in [0, 1]$ nós temos $W(j, \{\lambda x + (1 - \lambda) y\}) > W(j', \{\lambda x + (1 - \lambda)y\})$ e, portanto, podemos tomar um número racional $q_\lambda \in (W(j', \{\lambda x + (1 - \lambda) y\}), W(j, \{\lambda x + (1 - \lambda) y\}))$. Como W representa $\succsim$, para cada $\lambda, \lambda' \in [0, 1]$ tal que $\lambda > \lambda'$ nós temos $q_\lambda > W(j', \{\lambda x + (1-\lambda)y\}) > W(j, \{\lambda' x + (1-\lambda')y\})$ $> q_{\lambda'}$. Deste modo, constatamos que $q_{()}$ é uma função injetiva de $[0, 1]$ para $\mathbb{Q}$, o que é um absurdo. Concluímos que $\succsim$ não pode ser representada por uma função utilidade. $\|$

Para evitarmos situações tais como a ilustrada no exemplo anterior, nós precisamos reformular o Axioma de Continuidade apresentado acima.

Axioma 10 (Continuidade II). *Dados $j \in \mathcal{J}$ e $A \in \mathcal{B}(\Delta(C))$, os conjuntos $\{(j', B) \in \mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C)) : (j', B) \succ (j, A)\}$ e $\{(j', B) \in \mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C)) : (j, A) \succ (j', B)\}$ são abertos.*

Nós podemos estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 5. *A relação de preferência $\succsim$ satisfiaz Axiomas 9 e 10 se, e somente se, admite uma representação EU fraca.*

14 Characterização da EU ordinal Representações

Vamos considerar agora os seguintes postulados.

Axioma 11 (Independência Fraca). *Se $A \subseteq B$, então para todos $\lambda \in (0, 1]$, $\bar{B} \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ e $j \in \mathcal{J}$,*

$$\begin{aligned} (j, B) &\succ (j, A) \Longrightarrow (j, \lambda B + (1 - \lambda)\bar{B}) \succ (j, \lambda A + (1 - \lambda)\bar{B}), \\ (j, B) &\sim (j, A) \Longrightarrow (j, \lambda B + (1 - \lambda)\bar{B}) \sim (j, \lambda A + (1 - \lambda)\bar{B}). \end{aligned}$$

Axioma 12 (Monotonicidade). *Se $B \subseteq A$, então $(j, A) \succsim (j, B)$ para todos $j \in \mathcal{J}$.*

O Teorema 2 de Nakata afirma que os Axiomas 7, 8, 11 e 12 caracterizam as relações de preferência que admitem uma representação EU ordinal finita. Esta afirmação sofre dos mesmos problemas associados ao seu primeiro resultado e, em particular, o Exemplo 3 satisfaz todos os axiomas acima também. Novamente, a maneira de remediar esta situação é passar da Continuidade para a Continuidade II. Contudo, neste caso também devemos garantir a finitude de todos os conjuntos em $\{\mathcal{M}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$. Considere o postulado a seguir:

Axioma 13. *Dados quaisquer $A \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ e $j \in \mathcal{J}$, existe um menu finito $B \subseteq A$ tal que $(j, A) \sim (j, B)$.*

Nós podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 6. *A relação de preferência $\succsim$ satisfaz os Axiomas 8, 10, 11 and 12 se, e somente se, admite uma representação EU ordinal. Sobretudo, $\succsim$ admite uma representação EU ordinal se, e somente se, satisfaz todos os axiomas prévios e mais o Axioma 13*

15 Caracterização da EU aditiva monótona Representações

Considere o seguinte postulado.

Axioma 14 (Independência)**.** *Se* $(j, A) \succ (j, B)$*, então para todos* $\lambda \in (0, 1]$ *e* $\bar{B} \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ *nós temos*

$$(j, \lambda A + (1 - \lambda)\bar{B}) \succ (j, \lambda B + (1 - \lambda)\bar{B}).$$

O Teorema 3 de Nakata afirma que os Axiomas 7, 8, 12 e 14 caracterizam as relações de preferência que admitem uma representação EU aditiva monótona finita. Mais uma vez, sua afirmação sofre dos mesmos problemas que as versões das seções anteriores. Isto é, não são suficientes para garantir que os conjuntos $\mathcal{M}_j$'s são finitos e Axioma 7 não assegura que a relação $\succsim$ possa ser representada por uma função utilidade. Note que o Exemplo 3 satisfaz todos os axiomas acima.

Como fizemos na seção anterior, isto pode ser corrigido parcialmente ao substituirmos o Axioma 7 pelo Axioma 10 e ao adicionarmos o Axioma 13 ao sistema axiomático acima. Contudo, como mostra o exemplo a seguir, isto não é o bastante para garantir que $\succsim$ admite uma representação EU aditiva monótona finita. Antes de apresentarmos o exemplo, vamos estabelecer o seguinte postulado:

Axioma 15. *Para quaisquer* $j, k \in \mathcal{J}$*,* $A, B, A^{'}, B^{'} \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ *e* $\lambda \in (0, 1)$*, se* $(j, A) \sim (k, B)$ *e* $(j, A^{'}) \sim (k, B^{'})$*, então* $(j, \lambda A + (1 - \lambda) A^{'}) \sim (k, \lambda B + (1 - \lambda) B^{'})$.

Pode ser facilmente verificado que se $\succsim$ admite uma representação EU aditiva monótona finita, então $\succsim$ satisfaz o Axioma 15. Porém, os Axiomas 8, 10, 12, 13 e 14 não implicam o Axioma 15. Este é o teor do exemplo seguinte:

Exemplo 4. Sejam $\mathcal{J} := \{j, k\}$ e $C := \{x, y\}$. Defina

$$u_j(x) := 9; u_j(y) := 1;$$
$$u_k(x) := 1; u_k(y) := 3.$$

Defina a função $V : \mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C)) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$V(j, A) := \max_{p \in A} (p(x)u_j(x) + p(y)u_j(y))$$
$$V(k, A) := \left(\max_{p \in A} (p(x)u_k(x) + p(y)u_k(y)) \right)^2$$

para qualquer $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$. A preferência $\succsim$ representada por V satisfiaz os Axiomas 8, 10, 12, 13 e 14. Porém, não satisfaz o Axioma 15. Com efeito, sejam $A := \{x\} =: B'$ and $A' := \{y\} =: B$. Note que $V(j, A) = 9 = V(k, B)$, $V(j, A^{'}) = 1 = V(k, B^{'})$, mas $V(j, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^{'}) = 5 > 4 = V(k, \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^{'})$. Isto é, $(j, A) \sim (k, B)$, $(j, A^{'}) \sim (k, B^{'})$, mas $(j, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^{'}) \succ (k, \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^{'})$. Logo, Axioma 15 não é satisfeito, o que implica que $\succsim$ admite uma representação EU aditiva monótona finita. ‖

Nós mostramos acima que Axioma 15 é uma condição necessária para uma representação aditiva monótona. O resultado abaixo mostra que a combinação do Axioma 15 com os outros postulados considerados no Exemplo 4 é suficiente para gerar esta representação.

Teorema 7. *A relação de preferência $\succsim$ satisfaz os Axiomas 8, 10, 12, 13, 14 e 15 se, e somente se, admite uma representação EU aditiva monótona finita.*

A Demonstrações dos Teoremas

A.1 Demonstração do Teorema 5

Como a demonstração de que os axiomas são necessários para a representação proposta baseia-se em argumentos padrão, então iremos mostrar apenas que os axiomas são suficientes para garantir que $\succsim$ possua uma representação EU fraca. $\mathcal{B}(\Delta(C))$ é espaço métrico compacto, conexo e separável, de modo que $\mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ é um espaço métrico separável. Pelo Axioma 10, $\succsim$ é uma relação de preferência contínua em $\mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$. Então podemos invocar o Teorema de Representação de Debreu para garantir a existência de uma função contínua $v : \mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C)) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todos os pares $(i, A), (j, B) \in \mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$,

$$(i, A) \succsim (j, B) \Longleftrightarrow v(i, A) \geq v(j, B)$$

Fixe $j \in \mathcal{J}$ e defina a relação $\succsim_j \subseteq \mathcal{B}(\Delta(C))^2$ fazendo $A \succsim_j B$ se, e somente se $(j, A) \succsim (j, B)$. O Teorema 1 em DLR implica a existência de um conjunto de estados $\mathcal{M}_j$, uma função dependente de estados $U_j : \Delta(C) \times \mathcal{M}_j \to \mathbb{R}$ e um agregador $\gamma_j : \mathbb{R}^{\mathcal{M}_j} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $A, B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$,

$$A \succsim_j B \iff \gamma_j\left(\left\langle \max_{p \in A} U_j(p, m_j) \right\rangle_{m_j \in \mathcal{M}_j}\right) \geq \gamma_j\left(\left\langle \max_{p \in B} U_j(p, m_j) \right\rangle_{m_j \in \mathcal{M}_j}\right)$$

e para todos $m_j \in \mathcal{M}_j$, $U_j(., m_j)$ é uma função utilidade esperada. Como $\succsim_j$ concorda com $\succsim$ em $\{j\} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$, segue que se $A, B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ são tais que $\gamma_j\left(\langle \max_{p \in A} U(p, m_j) \rangle_{m_j \in \mathcal{M}_j}\right) = \gamma_j\left(\langle \max_{p \in B} U(p, m_j) \rangle_{m_j \in \mathcal{M}_j}\right)$, então $v(j, A) = v(j, B)$. Então, podemos definir sem ambiguidades a função $\varphi_j : \mathbb{R}^{\mathcal{M}_j} \to \mathbb{R}$ fazendo

$$\varphi_j(\xi) := \begin{cases} v(j, A); \text{ se existe algum } A \in \mathcal{B}(\Delta(C)) \text{ com } \{\max_{p \in A} U_j(p, m_j)\}_{m_j \in \mathcal{M}_j} = \xi \\ 0; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Defina $U : \Delta(C) \times \cup_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{M}_j \longrightarrow \mathbb{R}$ fazendo $U(p, m_j) := U_j(p, m_j)$ para todos $j \in \mathcal{J}$ e $m_j \in \mathcal{M}_j$. Como, para todos $j \in \mathcal{J}$ e $A \in \mathcal{B}(\Delta(C))$, $v(j, A) = \varphi_j(\langle \max_{p \in A} U(p, m_j) \rangle_{m_j \in \mathcal{M}_j})$, então $(\{\mathcal{M}_j, \varphi_j\}_{j \in \mathcal{J}}, U)$ é uma representação EU fraca de $\succsim$. ■

A.2 Demonstração do Teorema 6

Novamente, como a demonstração de que os axiomas são necessários para a representação proposta baseia-se em argumentos padrão, então iremos mostrar apenas que os axiomas são suficientes para garantir que $\succsim$ possua a representação desejada. Para mostrarmos que os axiomas são suficientes para a representação proposta, iniciamos a argumentação como na demonstração Teorema 5 usamos o Teorema de Debreu para encontrarmos uma função contínua $v : \mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C)) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todos $(i, A), (j, B) \in \mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$,

$$(i, A) \succsim (j, B) \Longleftrightarrow v(i, A) \geq v(j, B).$$

Fixe $j \in \mathcal{J}$ arbitrário e defina a relação $\succsim_j \subseteq \mathcal{B}(\Delta(C)) \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ por $A \succsim_j B$ se, e somente ser, $v(j, A) \geq v(j, B)$. Como v representa $\succsim$, então $\succsim_j$ satisfaz todos os axiomas enunciados no Teorema 3 de DLR. Isto implica a existência de um conjunto de estados $\mathcal{M}_j$, uma função dependente de estados $U_j : \Delta(C) \to \mathbb{R}$ e um agregador estritamente crescente $\gamma_j : \mathbb{R}^{\mathcal{M}_j} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $A, B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$,

$$A \succsim_j B \iff \gamma_j\left(\left\{\max_{p\in A} U_j(p, m_j)\right\}_{m_j \in \mathcal{M}_j}\right) \geq \gamma_j\left(\left\{\max_{p\in B} U_j(p, m_j)\right\}_{m_j \in \mathcal{M}_j}\right)$$

e, para todos $m_j \in \mathcal{M}_j$, $U_j(., m_j)$ é uma função utilidade esperada.

Repetindo os passos da demonstração do Teorema 5, obtemos uma representação EU fraca $(\{\mathcal{M}_j, \varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}, U)$ de $\succsim$, com a propriedade adicional de que cada agregador φ_j é estritamente crescente em seu domínio relevante. Isto é, $(\{\mathcal{M}_j, \varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}, U)$ é uma representação EU ordinal de $\succsim$. Também de DLR, sabemos que cada conjunto $\mathcal{M}_j$ pode ser escolhido de modo a não possuir estados redundantes. Isto é, para cada $j \in \mathcal{J}$ and para distintos m_j e m'_j em $\mathcal{M}_j$, $U(\cdot, m_j)$ e $U(\cdot, m'_j)$ representam diferentes preferências não triviais.[4]

Mostremos agora que o Axioma 13 implica que cada conjunto $\mathcal{M}_j$ é finito. Fixe $j \in \mathcal{J}$ qualquer e tome $A \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tal que existam $p_0 \in \Delta(C)$ e $\delta > 0$ tal que $A := \{q \in \mathbb{R}^C_+ : \|q - p_0\| \leq \delta$ e $\sum_{c\in C} q(c) = 1\}$.[5] Devido ao fato de A ser uma bola fechada em $\mathcal{B}(\Delta(C))$, dados quaisquer pares m_j e m'_j em $\mathcal{M}_j$ nós temos que $\arg\max_{p\in A} U(p, m_j) \neq \arg\max_{p\in A} U(p, m'_j)$ e os conjuntos $\arg\max_{p\in A} U(p, m_j)$ e $\arg\max_{p\in A} U(p, m'_j)$ são unitários. Considere qualquer $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ finito tal que $B \subseteq A$. Para todos $j \in \mathcal{J}$ e todos $m_j \in \mathcal{M}_j$ temos $\max_{p\in B} U(p, m_j) \leq \max_{p\in A} U(p, m_j)$. Agora, suponha existir algum $j \in \mathcal{J}$ para o qual o conjunto $\mathcal{M}_j$ é infinito. Deve existir algum $m^*_j \in \mathcal{M}_j$ such that $\max_{p\in B} U(p, m_j) < \max_{p\in A} U(p, m_j)$. Com efeito, se assim não fosse, teríamos $\max_{p\in B} U(p, m_j) = \max_{p\in A} U(p, m_j)$ para todos $m_j \in \mathcal{M}_j$ e devido à finitude de B e infinitude de $\mathcal{M}_j$ encontraríamos $m'_j, m''_j \in \mathcal{M}_j$ distintos tais que $\max_{p\in A} U(p, m'_j) = \max_{p\in B} U(p, m'_j) = \max_{p\in B} U(p, m''_j) = \max_{p\in A} U(p, m''_j)$, uma contradição. Como φ_j é estritamente crescente e $(\{\mathcal{M}_j, \varphi_j\}_{j\in\mathcal{J}}, U)$ representa $\succsim$, isto implica que $(j, A) \succ (j, B)$. Logo, para qualquer subconjunto B de A nós temos $(j, A) \nsim (j, B)$, o que contradiz o Axioma 13. ■

A.3 Demonstração do Teorema 7

Mais uma vez, apresentaremos a prova de que os axiomas são suficientes para a representação desejada, pois a prova de que a representação implica nos axiomas segue de argumentos padrão. Nossa demonstração baseia-se na indução sobre o número de elementos de $\mathcal{J}$. Se $|\mathcal{J}| = 1$, então estamos no arcabouço de DLR e o resultado segue do Teorema 2 em Dekel et al (2007) e da observação de que o Axioma 13 implica que o número de estados em uma representação EU ordinal sem estados redundantes deve ser finito. Assuma agora now que a representação é verdadeira quando o conjunto de serviços de informação possui n elementos e considere $|\mathcal{J}| = n+1$. Sem perda de generalidade, podemos escrever $\mathcal{J} := \{1, ..., n+1\}$. Por Continuidade II e pela compacidade de $\mathcal{B}(\Delta(C))$, para cada $j \in \mathcal{J}$ existe $\underline{A}_j \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tal que $(j, B) \succsim (j, \underline{A}_j)$ para todos $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$. Podemos ordenar os elementos de $\mathcal{J}$ de modo que $(n+1, \underline{A}_{n+1}) \succsim (j, \underline{A}_j)$ para todos $j \in \mathcal{J}$. Considere a restrição de $\succsim$ a $(\mathcal{J} \setminus \{n+1\}) \times \mathcal{B}(\Delta(C))$. Pela hipótese de indução, esta restrição admite uma representação EU aditiva monótona finita $(\{\mathcal{M}_j, \left\langle \mu_{m_j} \right\rangle_{m_j \in \mathcal{M}_j}\}_{j\in\mathcal{J}\setminus\{n+1\}}, U)$. Para cada $j \in$

[4] Dado $j \in \mathcal{J}$, a preferência $\succsim_{m_j}$ representada por $U(\cdot, m_j)$ é não trivial no caso em que existem $p, q \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tais que $p \succ_{m_j} q$.

[5] Dados $p, q \in \Delta(C)$ quaisquer, nós temos $\|q - p\| = \sqrt{\sum_{x\in C}(q(x) - p(x))^2}$.

$\mathcal{J} \setminus \{n+1\}$ e $A \in \mathcal{B}(\Delta(C))$, seja

$$v(j,A) := \sum_{m_j \in \mathcal{M}_j} \mu_{m_j} \max_{p \in A} U(p, m_j).$$

(a) Suponha o caso em que $(n+1, \underline{A}_{n+1}) \succsim (j, \Delta(C))$ para todos $j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}$: Se existe algum $j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}$ tal que $(n+1, \underline{A}_{n+1}) \sim (j, \Delta(C))$, então considere qualquer representação EU aditiva monótona finita $(\mathcal{M}_{n+1}, \langle \mu_{m_{n+1}} \rangle_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}}, \tilde{U})$ da restrição de $\succsim$ a $\{n+1\} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ e normalize $\tilde{U}$ de modo que

$$\widetilde{v}(n+1, \underline{A}_{n+1}) := \sum_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}} \mu_{m_{n+1}} \max_{p \in \underline{A}_{n+1}} \tilde{U}(p, m_{n+1}) = v(j, \Delta(C))$$

e para todos $(i, A) \in (\mathcal{J} \setminus \{n+1\}) \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ defina $\widetilde{v}(i,A) := v(i,A)$. Por outro lado, assuma que $(n+1, \underline{A}_{n+1}) \succ (j, \Delta(C))$ para todos $j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}$. Tome qualquer representação EU aditiva monótona finita $(\mathcal{M}_{n+1}, \langle \mu_{m_{n+1}} \rangle_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}}, \tilde{U})$ da restrição de $\succsim$ a $\{n+1\} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ e normalize $\tilde{U}$ de modo que

$$\widetilde{v}(n+1, \underline{A}_{n+1}) := \sum_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}} \mu_{m_{n+1}} \max_{p \in \underline{A}_{n+1}} \tilde{U}(p, m_{n+1}) > v(j, \Delta(C))$$

para todos $j \in \mathcal{J}$.[6] Defina também, para cada $(i, A) \in (\mathcal{J} \setminus \{n+1\}) \times \mathcal{B}(\Delta(C))$, $\widetilde{v}(i,A) := v(i,A)$. Finalmente defina $\hat{U} : \Delta(C) \times \cup_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{M}_j \to \mathbb{R}$ fazendo

$$\hat{U}(\cdot, j) := \begin{cases} U(\cdot, j); \text{ se } j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\} \\ \widetilde{U}(\cdot, n+1); \text{ se } j = n+1 \end{cases}$$

Decorre que $(\{\mathcal{M}_j, \left\langle \mu_{m_j} \right\rangle_{m_j \in \mathcal{M}_j}\}_{j \in \mathcal{J}}, \hat{U})$ é uma representação EU aditiva monótona finita de $\succsim$.

(b) Considere que $\mathcal{I} := \{j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\} : (j, \Delta(C)) \succ (n+1, \underline{A}_{n+1})\} \neq \varnothing$. Como $\mathcal{J}$ é um conjunto finito, Continuidade II e Não Trivialidade garantem que existe algum $A^* \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tal que $(j, \Delta(C)) \succ (n+1, A^*) \succ (n+1, \underline{A}_{n+1}) \succsim (j, \underline{A}_j)$ para todos $j \in \mathcal{I}$. Agora defina o menu $\mathcal{B}^* := \{A \in \mathcal{B}(\Delta(C)) : (n+1, A^*) \succsim (n+1, A)\}$. Dado que a restrição de $\succsim$ a $\{n+1\} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ admite representação EU aditiva monótona finita, então $\mathcal{B}^*$ é um conjunto convexo. Fixe $j \in \mathcal{I}$ arbitrário. Dado $A \in \mathcal{B}^*$ arbitrário, temos $(j, \Delta(C)) \succ (n+1, A) \succsim (n+1, \underline{A}_{n+1}) \succsim (j, \underline{A}_j)$ e Continuidade II implica existir algum $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tal que $(n+1, A) \sim (j, B)$. Logo, para cada $A \in \mathcal{B}^*$ podemos definir $w(A) := v(j, B)$ para todos $j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}$ e $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tal que $(n+1, A) \sim (j, B)$.

Afirmação 18. *w é uma transformação afim em $\mathcal{B}^*$.*

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{B}^*$, $\lambda \in (0,1)$ e $j \in \mathcal{I}$. O Axioma 10 implica existirem $A', B' \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tais que $(n+1, A) \sim (j, A')$ e $(n+1, B) \sim (j, B')$. Por definição, $w(A) = v(j, A')$ e $w(B) = v(j, B')$. Pelo Axioma 15, também temos $(n+1, \lambda A + (1-\lambda)B) \sim (j, \lambda A' + (1-\lambda)B')$. Como $\mathcal{B}^*$ é convexo, $\lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{B}^*$. Como $v(j, \cdot)$ é afim, pela definição de w nós temos $w(\lambda A + (1-\lambda)B) = v(j, \lambda A' + (1-\lambda)B') = \lambda V(j, A') + (1-\lambda)V(j, B') = \lambda w(A) + (1-\lambda)w(B)$. $\|$

[5] Podemos, por exemplo, definir $U' := \tilde{U} - \sum_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}} \mu_{m_{n+1}} \max_{p \in \underline{A}_{n+1}} \tilde{U}(p, m_{n+1}) + V(j, \Delta(C))$ e substituir $\tilde{U}$ por U' na representação.

[6] Podemos fazer, por exemplo, $U' := \tilde{U} - \sum_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}} \mu_{m_{n+1}} \max_{p \in \underline{A}_{n+1}} \tilde{U}(p, m_{n+1}) + \max_{j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}} V(j, \Delta(C)) + 1$ e substitua $\tilde{U}$ por U' na representação.

Pelo Teorema de Hahn-Banach, w possui uma única extensão afim para $\mathcal{B}(\Delta(C))$. Abusando da notação, vamos denotar esta extensão também por w.

Afirmação 19. *w representa a restrição de $\succsim$ em $\{n+1\} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$.*

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$. Pela Continuidade II, tome $\lambda \in (0,1)$ suficientemente grande tal que $\lambda \underline{A}_{n+1} + (1-\lambda)A$ e $\lambda \underline{A}_{n+1} + (1-\lambda)B$ estejam em $\mathcal{B}^*$. Pela definição de w e sua afinidade, temos $(n+1, \lambda \underline{A}_{n+1} + (1-\lambda)A) \succsim (n+1, \lambda \underline{A}_{n+1} + (1-\lambda)B) \iff w(\lambda \underline{A}_{n+1} + (1-\lambda)A) \geq w(\lambda \underline{A}_{n+1} + (1-\lambda)B)$ $\iff w(A) \geq w(B)$. Como a restrição de $\succsim$ a $\{n+1\} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ admite uma representação EU aditiva monótona finita, então $(n+1, A) \succsim (n+1, B) \iff (n+1, \lambda \underline{A}_{n+1} + (1-\lambda)A) \succsim (n+1, \lambda \underline{A}_{n+1} + (1-\lambda)B)$ $\iff w(A) \geq w(B)$. $\|$

Afirmação 20. *Seja $A \in \mathcal{B}(\Delta(C))$. Se existem $j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}$ e $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tais que $(n+1, A) \sim (j, B)$, então $w(A) = v(j, B)$. Se $(n+1, A) \succ (j, B)$ para todos $j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}$ e $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$, então $w(A) > v(j, B)$ para todos $j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}$ e $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$.*

Observação 4. *Observe que se existem $j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}$ e $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tais que $(j, B) \succsim (n+1, A)$, então ocorre $(j, B) \succsim (n+1, A) \succsim (n+1, \underline{A}_{n+1}) \succsim (j, \underline{A}_j)$ e Continuidade II implica na existência de $B' \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tal que $(n+1, A) \sim (j, B')$.*

Demonstração. Se $A \in \mathcal{B}^*$, então o resultado afrimado segue imediatamente. Suponha que $A \notin \mathcal{B}^*$ e que $(n+1, A) \sim (j, B)$ para algum $j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}$ e para algum $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$, de modo que $(n+1, A) \sim (j, B)$ $\succsim (n+1, \underline{A}_{n+1}) \succsim (j, \underline{A}_j)$. Axioma 10 implica a existência de algum $\underline{B} \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tal que $(n+1, \underline{A}_{n+1}) \sim (j, \underline{B})$. Como $(n+1, A^*) \succ (n+1, \underline{A}_{n+1})$, então podemos tomar algum $\lambda \in (0,1)$ suficientemente grande de modo que $\lambda \underline{A}_{n+1} + (1-\lambda)A \in \mathcal{B}^*$. Pelo Axiom 15, nós temos $(n+1, \lambda \underline{A}_{n+1} + (1-\lambda)A) \sim (j, \lambda \underline{B} + (1-\lambda)B)$, de modo que $w(\lambda \underline{A}_{n+1} + (1-\lambda)A) = v(j, \lambda \underline{B} + (1-\lambda)B)$. Dado que w e $v(j, \cdot)$ são transformações afim, e $w(\underline{A}_{n+1}) = v(\underline{B})$, segue que $w(A) = v(j, B)$. Finalmente, suponha o caso em que $(n+1, A) \succ (j, B)$ para todos $j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}$ e $B \in \mathcal{B}(\Delta(C))$. Fixe $j^* \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\}$ e $B^* \in \mathcal{B}(\Delta(C))$. Se existe algum $A' \in \mathcal{B}(\Delta(C))$ tal que $(n+1, A') \sim (j, B^*)$ então, pela Afirmação anterior e pelo que já provamos nesta Afirmação, nós temos $w(A) > w(A') = v(j, B^*)$. Caso contrário, decorre que $w(A) > w(\underline{A}_{n+1}) > v(j, B^*)$. $\|$

Afirmação 21. *Existe uma representação EU aditiva monótona finita $(\mathcal{M}_{n+1}, \langle \mu_{m_{n+1}} \rangle_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}}, \tilde{U})$ da restrição de $\succsim$ a $\{n+1\} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ tal que*

$$w(A) := \sum_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}} \mu_{m_{n+1}} \max_{p \in A} \tilde{U}(p, m_{n+1}),$$

para todos $A \in \mathcal{B}(\Delta(C))$.

Demonstração. Pelo Teorema 2 em Dekel et al (2007) e pela observação de que Finitude Finiteness implica que o número de estados em uma representação EU ordinal sem estados redundantes deve ser finito, sabemos que a restrição de $\succsim$ a $\{n+1\} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$ admite uma representação EU aditiva monótona finita $(\mathcal{M}_{n+1}, \langle \mu_{m_{n+1}} \rangle_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}}, \hat{U})$. Ademais, podemos escolher esta representação de modo que $\sum_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}} \mu_{m_{n+1}}$ $= 1$. Defina $\hat{V} : \mathcal{B}(\Delta(C)) \to \mathbb{R}$ fazendo

$$\widehat{v}(A) := \sum_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}} \mu_{m_{n+1}} \max_{p \in A} \hat{U}(p, m_{n+1}), \text{ para todos } A \in \mathcal{B}(\Delta(C)).$$

Observe que w e $\widehat{v}$ são ambas representações afim da restrição de $\succsim$ a $\{n+1\} \times \mathcal{B}(\Delta(C))$. Pela unicidade de tal representações, uma deve ser transformação afim da outra, isto é, devem existir $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $w(A) = \alpha\widehat{v}(A) + \beta$ para todos $A \in \mathcal{B}(\Delta(C))$. Defina $\tilde{U} : \Delta(C) \to \mathbb{R}$ por $\tilde{U}(p) := \alpha\hat{U}(p) + \beta$ para todos $p \in \Delta(C)$. Finalmente, note que

$$w(A) = \sum_{m_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}} \mu_{m_{n+1}} \max_{p \in A} \tilde{U}(p, m_{n+1}), \text{ para todos } A \in \mathcal{B}(\Delta(C)).$$

o que conclui a demonstração da afirmação. $\|$

Agora, vamos definir $\widetilde{v} : \mathcal{J} \times \mathcal{B}(\Delta(C)) \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{v}(j, \cdot) := \begin{cases} v(j, \cdot); \text{ se } j \in \mathcal{J} \setminus \{n+1\} \\ w; \text{ se } j = n+1 \end{cases}$$

As três Afirmações anteriores implicam que $\widetilde{v}$ representa $\succsim$ e que admite uma representação EU aditiva monótona finita. ∎

Parte V

BIBLIOGRAFIA

Barbosa, L. F. B (2013) Teoria da P(R)eferência Revelada com Aspiração. Manuscrito, Universidade de Brasília.

Barbosa, L. F. B., F. Bispo, D. O. Cajueiro e G. Riella (2012). Revealed (P)Reference Theory with Aspirations. Manuscrito, Universidade de Brasília.

Dekel, E. , L. L Barton e A. Rustichini. (2001) Representing Preferences With a Unique Subjective State Space. Econometrica, vol 75, n^o 2, 591-600.

Dekel, E. , L. L Barton, A. Rustichini e T. Sarver (2007). Representing Preferences With a Unique Subjective State Space: Corrigendum. Econometrica, vol 69, n^o 4, 891-934.

Farquhar, P. H. e A. R. Pratkanis (1993). Decision structuring with phantom alternatives. Management Science 39(10), 1214–1226.

Fudenberg, D e J. Tirole (1991) Game Theory. Massachusetts: MIT Press.

Guney, B. , M. Richter e M. Tsur (2011). Aspiration-based Choice Theory. Manuscrito, NYU.

Hedgcock, W., A. R. Rao e H. A. Chen (2009). Could Ralph Nader's Entrance and Exit Have Helped Al Gore? The Impact of Decoy Dynamics on Consumer Choice. Journal of Marketing Research 46, 330–343.

Jehle, G. A. e P. J. Reny. (2001). Advanced Microeconomic Theory. Boston: Addison Wesley.

Masatlioglu, Y. e E. A. Ok (2005). Rational Choice with Status Quo Bias. Journal of Economic Theory 121, 1–29.

Masatlioglu, Y. e E. A. Ok (2010). A Canonical Model of Choice with Initial Endowments. Manuscrito, NYU.

Min, S. K. (2003). Consumer Response to Product Unavailability. Tese de Doutorado, Ohio State University.

Nakata, H. (2011) Equivalent Comparisons of Information Channels. Theory and Decision 71, 559-574.

Ok, E.A (2007) Real Analyis with Economic Applications. Princeton: Princeton University Press.

Ok, E. A., P. Ortoleva e G. Riella (2011). Revealed (P)Reference Theory. Manuscrito, NYU.

Pettibone, J. C. e D. H. Wedell (2000). Examining Models of Nondominated Decoy Effects Across Judgment and Choice. Organizational Behavior and Human Decision Processes 81(2), 300–328.

Pettibone, J. C. e D. H.Wedell (2007). Testing Alternative Explanations of Phantom Decoy Effects. Journal of Behavioral Decision Making 20, 323–341.

Richter, M. (2010). Ordinal Equivalence of Semimetrics and Metrics. Manuscrito, NYU.

Siegel, S. (1957). Level of Aspiration and Decision Making. Psychological Review 64(4),

253–262.